КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра высшей математики и математического моделирования

ГЕОМЕТРИЯ:

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ К ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ

X семестр

Основные теоремы и примеры решения задач
(в помощь выпускнику)

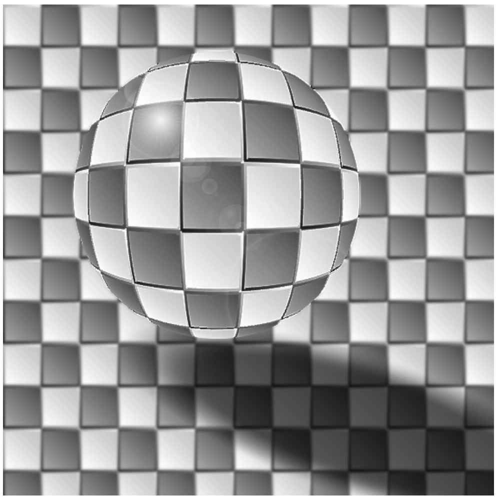
проф. Ю.Г.Игнатьева

Редакция 2013 г.

Около 100 конкретных примеров!

По просьбе студентов издание дополнено рядом примеров по проективной и дифференциальной геометрии!

Лаборатория НИЛИТМО КФУ



Казанский университет
2013

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института математики и механики

им. Н.И. Лобачевского

Рецензенты:

Аминова А.В., д-р. физ.-мат. наук, проф., (КГУ); Мухлисов Ф.Г.., д-р. физ.-мат. наук, проф., (ТГГПУ)

Игнатьев Ю.Г.
Геометрия: Учебное пособие к государственному экзамену по математике. - Казань: КФУ, 2013, - 139 с.

Учебное пособие является приложением к Курсу обзорных лекций Автора по геометрии к Государственным экзаменам и охватывает все следующие разделы Курса геометрии: геометрия евклидовых и аффинных пространств, проективную и дифференциальную геометрию. Курс лекций снабжен большим количеством примеров решений основных геометрических задач. Электронная версия учебного пособия снабжена гиперссылками.

Материалы пособия предназначены для выпускников математических факультетов педагогических отделений университетов для подготовке к государственному аттестационному экзамену по математике.

Введение

Учебное пособие является приложением к Курсу обзорных лекций Автора по геометрии к Государственным экзаменам и охватывает все следующие разделы Курса геометрии: геометрия евклидовых и аффинных пространств, проективную и дифференциальную геометрию. Курс лекций снабжен большим количеством примеров решений основных геометрических задач.

Данная редакция пособия значительно переработана по сравнению с предыдущими: изъят ряд сугубо теоретических вопросов, имеющих второстепенное значение, по просьбе выпускников прошлых лет добавлено большое количество примеров по всем вопросам, входящим в программу Госэкзамена, и иллюстраций. При этом общий объем пособия значительно сокращен за счет более рационального изложения и размещения материала. Всего в Курс лекций включено **около 100** примеров по векторной алгебре, аналитической геометрии, движениям, проективной и дифференциальной геометрии. Особенно много примеров введено по просьбе студентов по разделам дифференциальной геометрии, традиционно трудных для изучения. Эти качества делают пособие особенно ценным, так как каждый вопрос экзаменационного билета в обязательном порядке содержит задачу.

Устранены ошибки и опечатки, обнаруженные в предыдущей редакции и по сравнению с последней добавлены некоторые вопросы, которые, как показали экзамены, недостаточно усвоены студентами.

Автор

Вопросы по геометрии к госэкзамену по математике 2004/2005 уч.год

Векторы и действия над ними

1. Скалярное произведение векторов и числовая проекция вектора на направление. Ортогональная и параллельная составляющие вектора на направление. Задача на вычисление элементов фигуры с использованием скалярного произведения векторов.
2. Векторное произведение векторов и его свойства. Геометрические приложения векторного произведения. Задача на вычисление элементов фигуры с помощью векторного произведения.
3. Смешанное произведение векторов и его свойства. Геометрические приложения смешанного произведения. Задача на вычисление элементов фигуры с помощью смешанного произведения.

Прямые и плоскости

4. Определение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов этих уравнений. Задача на составление и использование параметрического (канонического) уравнения прямой.
5. Общее уравнение прямой на плоскости, геометрический смысл коэффициентов и их связь с коэффициентами канонического уравнения. Нормированное уравнение прямой на плоскости. Задача на общее или нормированное уравнение прямой.
6. Взаимное расположение прямых в пространстве (теорема). Угол между прямыми, расстояние между скрещивающимися и параллельными прямыми. Задача на полное исследование взаимного расположения прямых в пространстве.
7. Два определения плоскости в пространстве. Параметрические и общее уравнения плоскости, их связь и геометрический смысл коэффициентов. Задача на составление параметрических и общих уравнений плоскости и вычисление с их помощью элементов фигуры.
8. Взаимное расположение плоскостей в пространстве (теорема). Угол между плоскостями, расстояние между параллельными плоскостями. Задача на полное исследование взаимного расположения двух плоскостей.
9. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью, расстояние между параллельными прямой и плоскостью. Задача на полное исследование взаимного расположения прямой и плоскости.

Кривые второго порядка на евклидовой плоскости

10. Кривые второго порядка и их свойства (фокальные, директориальные, оптические), свойства диаметра. Задача на применение свойств кривых второго порядка.

Аффинные пространства

11. Аффинный репер и аффинные координаты точки. Аффинные инварианты. Задача на доказательство с применением аффинного репера.
12. Простое отношение трех точек и его свойства. Формула координат точки, делящей отрезок в данном отношении. Задача на вычисление простого отношения трех точек с использованием аффинного репера.
13. Условия принадлежности двух точек одной полуплоскости, углу, треугольнику. Задача на исследование принадлежности точек многоугольникам.

Евклидовы пространства

14. Билинейные формы и их матрицы. Определение скалярного произведения с помощью билинейной формы. Определение движения евклидового пространства. Задача на определение движения и установление его рода.
15. Квадратичные формы и квадрики. Теорема о приведении квадрики к каноническому виду с помощью движений. Задача на приведение квадрики к каноническому виду с помощью движений в трехмерном пространстве.

16. Группа движений евклидова пространства и ее порядок. Классификация движений. Задача на нахождение образа прямой или плоскости при движении.

Проективные пространства

17. Модели проективной прямой и проективной плоскости. Проективные координаты точки. Однородные координаты. Задача на построение точки по ее проективным координатам.
18. Теорема Дезарга (прямая и обратная). Задача на построение с помощью теоремы Дезарга.
19. Сложное отношение четырех точек прямой. Определение, основные свойства. Полный четырехвершинник и гармоническая четверка точек. Задача на сложное отношение.

Дифференциальная геометрия кривых

20. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Формулы Френе-Серре. Задача на нахождение сопровождающего трехгранника кривой.
21. Кривизна и кручение кривой. Их геометрический смысл. Натуральные уравнения кривой. Задача на вычисление кривизны и кручения кривой.

Дифференциальная геометрия поверхностей

22. Первая квадратичная форма поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхности. Метрический тензор поверхности и его преобразование. Задача на вычисление первой квадратичной формы.
23. Угол между линиями на поверхности. Площадь части поверхности. Задача на вычисление угла между линиями на поверхности.
24. Нормальная кривизна линии на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности и главные кривизны, гауссова и средняя кривизны поверхности. Задача на вычисление главных кривизн поверхности и гауссовой кривизны.
25. Геодезическая кривизна линии на поверхности. Геодезические линии на поверхности. Задача о вычислении геодезической кривизны линии на поверхности.

Оглавление

Глава I

Векторы и действия над ними

I.1 Основные формулы векторной алгебры

1. Сумма векторов *Суммой векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ называется вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Это правило называется правилом треугольника.*

Для получения разности векторов $\vec{a} - \vec{b}$ необходимо в определении суммы векторов заменить вектор $\vec{b}$ на противоположный $(-\vec{b})$. Удобнее поэтому применять *правило параллелограмма*, согласно которому сумма и разность векторов определяются диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах как его сторонах.

2. Координаты вектора в базисе *Координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется упорядоченная тройка чисел (x^1, x^2, x^3), таких что:*

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3\,. \tag{I.1}$$

На плоскости это будет парой чисел (x^1, x^2):

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2\,. \tag{I.2}$$

Необходимо помнить, что базисом может быть лишь линейно независимая система векторов и их число, n, должно совпадать с размерностью пространства (на плоскости $n = 2$ и базисом может являться любая пара неколлинеарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Для того, чтобы выяснить, образует ли данная система трех (двух) векторов базис, достаточно вычислить определитель, составленный из координат этих векторов.

3 *При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются):* Пусть: $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3)$, тогда:

$$\vec{x} \pm \vec{y} = \vec{z} = (x^1 \pm y^1, x^2 \pm y^2, x^3 \pm y^3). \tag{I.3}$$

4. Основное векторное равенство для многоугольников *Сумма векторов, являющихся сторонами любой замкнутой ломаной, причем таких, что начало каждого последующего совпадает с концом предыдущего, равна нуль-вектору:*

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}. \tag{I.4}$$

5. Произведение вектора на число *Произведением $\alpha\vec{a}$ (или также $\vec{a}\alpha$) вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на число α; он параллелен вектору $\vec{a}$ или лежит с ним на одной прямой и направлен также, как вектор $\vec{a}$, если α - число положительное, и противоположное вектору $\vec{a}$, если α - число отрицательное. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3). \tag{I.5}$$

6. Коллинеарные векторы *Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.*

Коллинеарные векторы пропорциональны друг другу:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}. \tag{I.6}$$

Признаком коллинеарности двух векторов

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \quad \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$$

является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Координаты точки

1. *Системой координат называется совокупность точки O и векторного базиса, $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Точка O называется началом аффинной системы координат.*

2. *Координатами точки M относительно системы координат $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называется координаты ее радиуса вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$:*

$$M(x^1, x^2, x^3) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3\,. \tag{I.7}$$

3. *Координаты геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности координат начала и конца отрезка $[AB]$:*

$$\overrightarrow{AB} = (x^1_B - x^1_A, x^2_B - x^2_A, x^3_B - x^3_A). \tag{I.8}$$

4. Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении. *Если точка $M(x^1, x^2, x^3)$ делит отрезок $[AB]$ в отношении λ, т.е.:*

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}, \tag{I.9}$$

то координаты этой точки находятся из соотношений:

$$x^1 = \frac{x^1_A + \lambda x^1_B}{1+\lambda},\; x^2 = \frac{x^2_A + \lambda x^2_B}{1+\lambda};\; x^3 = \frac{x^3_A + \lambda x^3_B}{1+\lambda}. \tag{I.10}$$

I.2 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов *Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $((\vec{a}\ \vec{b}))$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:*

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}. \tag{I.11}$$

Осью ℓ будем называть прямую с заданным на ней направлением $\vec{i}$.

Определение проекции *Числовой проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ:*

$$\text{Пр}_{\vec{i}}\,\overrightarrow{AB}$$

называется длина отрезка $A'B'$ этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, опущенных из A и B на ось, взятая со знаком плюс, если направление $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением $\vec{i}$, и взятая *со знаком минус, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ и $\vec{i}$ противоположны.*

Связь скалярного произведения и числовой проекции *Скалярное произведение можно выразить через числовую проекцию:*

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = |\vec{a}|\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}. \tag{I.12}$$

и обратно:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{b}|}. \tag{I.13}$$

Свойства скалярного произведения

1. *Скалярное произведение симметрично:*

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = (\vec{b}\,\vec{a}); \tag{I.14}$$

2. *линейно по каждому из сомножителей:*

$$\Big((\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}\Big) = \lambda(\vec{a}\,\vec{c}) + \mu(\vec{b}\,\vec{c}); \tag{I.15}$$

3. *два ненулевых вектора ортогональны друг другу тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:*

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{0} \iff \vec{a}\perp\vec{b}. \tag{I.16}$$

4. *Длину вектора можно выразить через скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора):*

$$(\vec{a}\,\vec{a}) = \vec{a}^{\,2} \Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\,\vec{a})}. \tag{I.17}$$

5. Угол между векторами. *Углом $\alpha = \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между этими векторами, приведенными к общему началу. Этот угол изменяется на промежутке $[0, \pi]$.*

Если $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются сонаправленными, если $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \pi$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются противоположно направленными.

Ортонормированный базис

1. *Вектор единичной длины*

$$(\vec{e}\,\vec{e}) = 1.$$

называется ортом.

2. *Базис называется ортонормированным, если все его векторы взаимно ортогональны и имеют единичную длину (орты):*

$$\Big(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k\Big) = \delta_{ik} = (1, i=k; 0, i\neq k). \tag{I.18}$$

3. *В дальнейшем будем обозначать орты ортонормированного базиса трехмерного пространства посредством $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:*

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \tag{I.19}$$

$$(\vec{i}\ \vec{j}) = (\vec{j}\ \vec{k}) = (\vec{i}\ \vec{k}) = 0. \tag{I.20}$$

4. *Система координат (репер), являющаяся совокупностью точки O и ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, называется прямоугольной декартовой системой координат, а точка O - ее началом. В этой системе координат произвольный вектор $\vec{r}$ принято записывать в одном из двух эквивалентных видов:*

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

или

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Запись скалярного произведения в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты:

$$\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \qquad \vec{b} = (x_b, y_b, z_b).$$

1. *Координатная запись скалярного произведения:*

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \tag{I.21}$$

2. *Длина вектора:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\ \vec{a})} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}. \tag{I.22}$$

3. *Косинус угла между ненулевыми векторами:*

$$\cos \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \frac{(\vec{a}\ \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \tag{I.23}$$

4 *Разложение вектора на параллельную и ортогональную составляющие:*

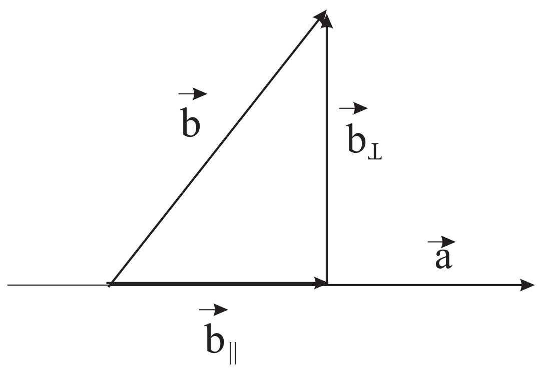


Рис.I.1. *Разложение вектора $\vec b$ на параллельную и ортогональную составляющие по отношению к вектору $\vec a$.*

Пусть даны два вектора $\vec a$ и $\vec b$. Определим *параллельную составляющую вектора $\vec b$ на направление $\vec a$* как вектор, сонаправленный вектору $\vec a$:

$$\vec b_{\|} = \lambda \vec a, \tag{I.24}$$

а *ортогональную составляющую этого вектора на направление $\vec a$* как вектор, $\vec b_{\perp}$, ортогональный вектору $\vec a$:

$$(\vec a\, \vec b_{\perp}) = 0, \tag{I.25}$$

такой что:

$$\vec b = \vec b_{\|} + \vec b_{\perp}. \tag{I.26}$$

Таким образом, подставляя (I.24) в (I.25) и умножая полученное равенство скалярно на $\vec a$, получим с учетом (I.25):

$$(\vec a\, \vec b) = \lambda |\vec a|^2; \Longrightarrow \lambda = \frac{(\vec a\, \vec d)}{|\vec a|^2} \tag{I.27}$$

Таким образом, из (I.24) и I.26) получим:

$$\vec b_{\|} = \frac{(\vec a\, \vec b)}{|\vec a|^2}\vec a; \qquad \vec b_{\perp} = \vec b - \frac{(\vec a\, \vec d)}{|\vec a|^2}\vec a. \tag{I.28}$$

Нетрудно видеть, что длина вектора $\vec b_{\|}$ совпадает с модулем числовой проекции этого вектора, $\text{Пр}_{\vec a}\, \vec b$.

Пример III.1. *Найти параллельную и ортогональную составляющие вектора $\vec b = (3, 1, 2)$ на направление $\vec a = (1, 2, -2)$.*

Решение

Найдем:

$$(\vec a\, \vec b) = 1; \qquad |\vec a| = 3.$$

Таким образом получим:

$$\vec b_{\|} = \frac{1}{9}(1, 2, -2); \qquad \vec b_{\perp} = \frac{1}{9}(26, 7, 20).$$

I.3 Векторное произведение векторов

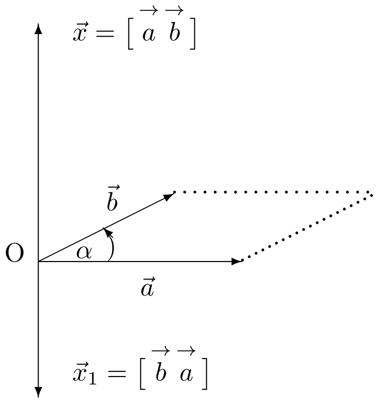


Рис.I.2. *Векторное произведение двух векторов*

Определение. *Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, который:(1) перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; (2) $|\vec{x}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$; (3) направлен так, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x})$ — правая (Рис.I.2).*

Свойства векторного произведения

1. Антисимметричность

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = -[\vec{b}\,\vec{a}]. \tag{I.29}$$

2. Линейность по каждому аргументу

$$\left[(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \vec{c}\right] = \lambda[\vec{a}\,\vec{c}] + \mu[\vec{b}\,\vec{c}]. \tag{I.30}$$

3. Модуль векторного произведения *численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.*

4. *Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения:*

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \Longleftrightarrow [\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{0}. \tag{I.31}$$

5. Координатная запись векторного произведения *В ортонормированном базисе:*

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \tag{I.32}$$

6. Формула площади треугольника ABC *Пусть декартовы координаты вершин треугольника равны:*

$$A(x_A, y_A, z_A); \quad B(x_B, y_B, z_B); \quad C(x_C, y_C, z_C).$$

Тогда:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|[\vec{a}\,\vec{b}]| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}|. \tag{I.33}$$

7. Площадь треугольника на плоскости:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}\left((x_2 - x_{})(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\right). \tag{I.34}$$

I.4 Смешанное произведение векторов

Определение *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется* **число**, *получаемое от умножения вектора $[\vec{a}\,\vec{b}]$ скалярно на $\vec{c}$. Оно обозначается символом $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, т.е.:*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \stackrel{def}{=} \Big([\vec{a}\,\vec{b}] \cdot c\Big). \tag{I.35}$$

Свойства смешанного произведения

1. Симметричность по отношению к перестановке векторного произведения:

$$([\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}) = (\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]) = ([\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}). \tag{I.36}$$

2. Перестановка элементов:

$$\begin{gathered}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \\ = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).\end{gathered} \tag{I.37}$$

3. Условие компланарности. *Тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ компланарна тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:*

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \Longleftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0. \tag{I.38}$$

4. Координатная запись смешанного произведения. *В ортонормированном базисе:*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \tag{I.39}$$

5. Геометрическое значение смешанного произведения *Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах (см. Рис.I.3).* Пусть A, B, C, D — какие-либо вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, и пусть координаты этих вершин обозначаются соответственно их названиям. Тогда:

$$V = \left\| \begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_B - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_C - z_A \end{matrix} \right\|. \tag{I.40}$$

При этом надо помнить соотношение между объемами простейших многогранников с одинаковыми соответствующими ребрами:

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} V_{\text{призмы}}.$$

I.5 Двойное векторное произведение

Двойным векторным произведением векторов *$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется выражение вида $[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]]$.*

Можно показать справедливость формулы ABC=BAC-CAB):

$$[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}). \tag{I.41}$$

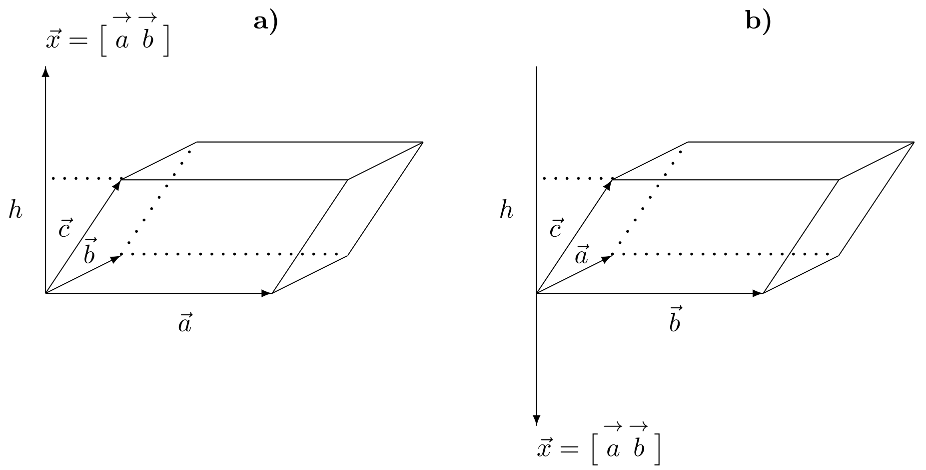


Рис.I.3. *Смешанное произведение трех векторов*

> Формула (IV.18) носит название формулы раскрытия двойного векторного произведения по векторам - сомножителям внутреннего векторного произведения.

Очевидно, что используя определение смешанного произведения векторов и (IV.18), можно рассматривать различные комбинированные произведения четырех и т. д. векторов.

I.6 Задачи на векторные операции

Пример III.2. *Пусть $\vec{x} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$ и известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис трехмерного пространства.*
1. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
2. Доказать, что векторы

$$\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c},\ \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c},\ \vec{r} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$$

также образуют базис.

Решение

1. Из (I.1) следует, что координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ есть коэффициенты разложения вектора $\vec{x}$ по этому базису, т.е., они равны $\vec{x} = (3, -4, 2)$.
2. Аналогично найдем координаты векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{p} = (2, -1, 1), \quad \vec{q} = (1, 2, -1), \quad \vec{r} = (-1, 1, -2).$$

Проверим, образуют ли эти векторы базис трехмерного пространства, для чего составим из их координат определитель, в котором каждому вектору соответствует столбец:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя, найдем:

$$\Delta = -6 \neq 0,$$

следовательно, векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ линейно независимы, т.е., образуют базис трехмерного пространства.

Пример П1.3. *В ортонормированном базисе даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -2)$ и $\vec{b} = (2, -4, 4)$. Найти длины этих векторов, угол между ними и проекцию вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{b}$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.*

Решение

1. *Найдем длины векторов:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3;$$

$$|\vec{b}| = 2\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 = -14.$$

2. *Найдем косинус угла между векторами:*

$$\cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} == \frac{-14}{18} = -\frac{7}{9}$$

— угол тупой.

3. *Найдем проекцию:*

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{-14}{3}.$$

4. *Найдем векторное произведение:*

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} - 8 \cdot \vec{k} = -8(0, 1, 1).$$

5. *Найдем площадь параллелограмма:*

$$S = |[\vec{a}\,\vec{b}]| = 8\sqrt{2}.$$

Пример П1.4. *Для предыдущего примера найти вектор $\vec{c}$, делящий пополам угол $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.*

Поскольку вектор $\vec{c}$ должен лежать в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, должно быть:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

Так как

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = \widehat{\vec{c}\,\vec{b}} \Longrightarrow \frac{(\vec{a}\,\vec{c})}{|\vec{a}|} = \frac{(\vec{c}\,\vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

Таким образом, получаем уравнение для определения коэффициентов λ, μ:

$$\lambda|\vec{a}| + \mu\frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{a}|} = \lambda\frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{b}|} + \mu|\vec{b}|.$$

Подставляя сюда результаты предыдущего примера, получим:

$$3\lambda - \frac{14}{3}\mu = -\frac{7}{3}\lambda + 6\mu.$$

Таким образом, получим:

$$16\lambda = 32\mu \Longrightarrow \lambda = 2\mu.$$

Полагая, например, $\mu = 1$, получим: $\lambda = 2$. Таким образом:

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{c} = (4,0,0) \Longrightarrow \vec{c} = (1,0,0) = \vec{i}.$$

Пример III.5. *Компланарны ли векторы $\vec{a} = (2,3,-1)$, $\vec{b} = (1,-1,3)$, $\vec{c} = (1,9,-11)$?*

Решение

Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2(11-27) - 3(-11-3) - 1(9+1) = 0.$$

Векторы компланарны.

Пример III.6. *Проверить справедливость равенства*

$$[[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}] + [[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}] + [[\vec{c}\,\vec{a}]\vec{b}] = \vec{0}.$$

Решение

Переставим сомножители во внешних векторных произведениях и воспользуемся формулой (IV.18). Имеем:

$$[\vec{c}\;[\vec{a}\,\vec{b}]] = \vec{a}(\vec{c}\,\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}\,\vec{a}),\; [\vec{a}\;[\vec{b}\,\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}),$$

$$[\vec{b}\;[\vec{c}\,\vec{a}]] = \vec{c}(\vec{b}\,\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}).$$

Сложим все три равенства и учтем коммутативность скалярного произведения пары векторов. При сложении правые части взаимно уничтожаются и справедливость написанного равенства доказана.

Пример III.7. *Даны вершины треугольника:*

$$A(1,2);\; B(5,5);\; C(7,10).$$

Найти: длины всех сторон треугольника ABC, косинусы его углов, высоту, опущенную из вершины B, длину AD, где D - основание этой высоты, площадь треугольника ABC (см. Рис.I.4).

Решение

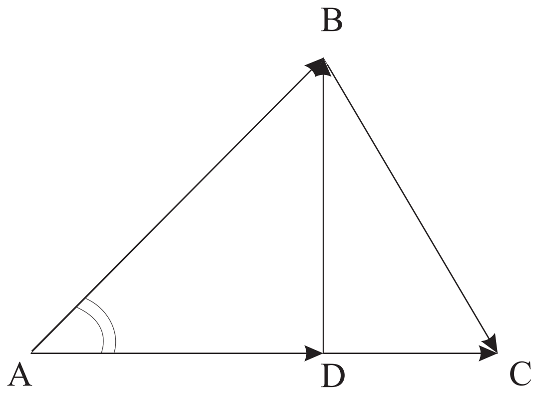


Рис.I.4. *Нахождение элементов треугольника с помощью векторных операций*

Определим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (4,3); \qquad \overrightarrow{AC} = (6,8).$$

Таким образом, найдем:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5; \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2+8^2} = 10.$$

Таким образом, например,

$$\cos A = \frac{(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{48}{10\cdot 5} = \frac{24}{25}.$$

Далее:

$$|\overrightarrow{AD}| = \left|\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}\right| = \left|\frac{(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|}\right| = \frac{48}{5}.$$

Площадь треугольника ΔFBC определим как половину площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,]\right|.$$

Таким образом, найдем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}\,\right| = \frac{1}{2}|\vec{k}|\left|\,\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\,\right| = \frac{|-6|}{2} = 3,$$

так как $|\vec{k}| = 1$. Используя теперь известную формулу площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{A}C|\cdot h,$$

Получим: $h = \frac{6}{5}$.

Пример III.8. *Даны вершины тетраэдра:*

$$A(1,-1,1);\ B(3,1,2);\ C(2,-3,3);\ D(1,2,5).$$

Найти объем тетраэдра, площадь его основания ABC и высоту, опущенную из вершины D на это основание.

Решение

1. *Найдем векторы, соответствующие ребрам тетраэдра:*

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2,2,1);$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, -2, 2); \quad \overrightarrow{BC} = (-1, -4, 1);$$
$$\overrightarrow{AD} = (0, 3, 4).$$

2. *Найдем длины ребер:*

$$|\overrightarrow{AB}| = 3; \quad |\overrightarrow{AC}| = 3; \quad |\overrightarrow{AD}| = 5; \quad |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}.$$

3. *Найдем векторное произведение:*

$$\vec{p} = \left[\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\,\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -3, -6) = 3(2, -1, -2).$$

4. *Найдем площадь основания тетраэдра:*

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\,\right]\right| = \frac{9}{2}.$$

5. *Найдем смешанное произведение:*

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = -33.$$

6. *Находим объем тетраэдра:*

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{11}{2}.$$

7. *Найдем высоту:*

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{11}{3}.$$

Глава II

Прямые и плоскости

II.1 Прямые линии: определения и теоремы

1. Определение прямой. *Прямой $d = d(M_0; \vec{q})$, проходящей через точку M_0 в направлении $\vec{q}$, называется геометрическое место точек M, таких что:*

$$\overrightarrow{M_0 M} = \lambda \vec{q}. \tag{II.1}$$

Точка M_0 называется опорной точкой прямой, вектор $\vec{q}$ — направляющим вектором этой прямой, а число λ, пробегающее **все** *множество действительных чисел, - параметром.*

2. Параметрические уравнения прямой *Пусть в декартовой системе координат текущая M и опорная M_0 точки прямой имеют координаты:*

$$M(x, y, z); \qquad M_0(x_0, y_0, z_0),$$

а направляющий вектор прямой $\vec{q}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеет координаты

$$\vec{q} = (l, m, n).$$

Тогда векторное равенство (II.1) можно записать в виде параметрических уравнений прямой:

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda l\,; \\ y &= y_0 + \lambda m\,; \\ z &= z_0 + \lambda n \end{cases} \quad (\text{для} \quad \text{плоскости}) :\Longrightarrow \begin{cases} x &= x_0 + \lambda l\,; \\ y &= y_0 + \lambda m \end{cases} \tag{II.2}$$

3. Канонические уравнения прямой. *После исключения из (II.2) параметра λ получаются канонические уравнения прямой:*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}; \quad (\text{ для} \quad \text{плоскости}) :\Longrightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{II.3}$$

II.2 Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости. *Общее уравнение прямой на плоскости можно записать в одном из двух эквивалентных видов:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \tag{II.4}$$

или:

$$Ax + By + C = 0, \tag{II.5}$$

где A, B одновременно не обращаются в нуль.

4. Связь коэффициентов общего и параметрического уравнения. *Коэффициенты A, B связаны с координатами (l, m) направляющего вектора прямой $\vec{q}$ соотношениями:*

$$A = -\nu l, \quad B = \nu m, \qquad (\nu \neq 0). \tag{II.6}$$

5. Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения. *Коэффициенты при неизвестных равны координатам вектора $\vec{N}$ нормали прямой d:*

$$\vec{N} = (A, B), \quad \left(\vec{N}\,\vec{q}\,\right) = 0. \tag{II.7}$$

При этом общее уравнение прямой можно записать в эквивалентной векторной формулировке:

$$\left(\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M}\right) = 0. \tag{II.8}$$

6. Теорема о взаимном расположении прямых на плоскости. *Две прямые d_1 и d_2, заданные своими общими уравнениями:*

$$d_1 : \; A_1x + B_1y + C_1 = 0; \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

пересекаются в единственной точке, если:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

параллельны, если:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

и совпадают, если:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

7. Нормированное уравнение прямой. *Введем нормирующий множитель μ :*

$$\mu = -\operatorname{sgn}(C)\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{II.9}$$

выбирая знак этого множителя противоположным знаку свободного члена общего уравнения прямой. Тогда умножая на μ общее уравнение прямой, получим нормированное уравнение прямой:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{II.10}$$

где α - угол между нормалью к прямой, проведенной из начала координат, и осью Ox, а p - расстояние от начала координат до прямой:

$$\cos\alpha = -\operatorname{sgn}(C)\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \; \sin\alpha = -\operatorname{sgn}(C)\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \; p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{II.11}$$

8. Отклонение точки от прямой. *Отклонением δ точки M_0 от прямой называется число, равное $+d$, если M_0 и начало координат находятся по разные стороны прямой, и равное $-d$, если M_0 и начало координат находятся по одну сторону от прямой.*

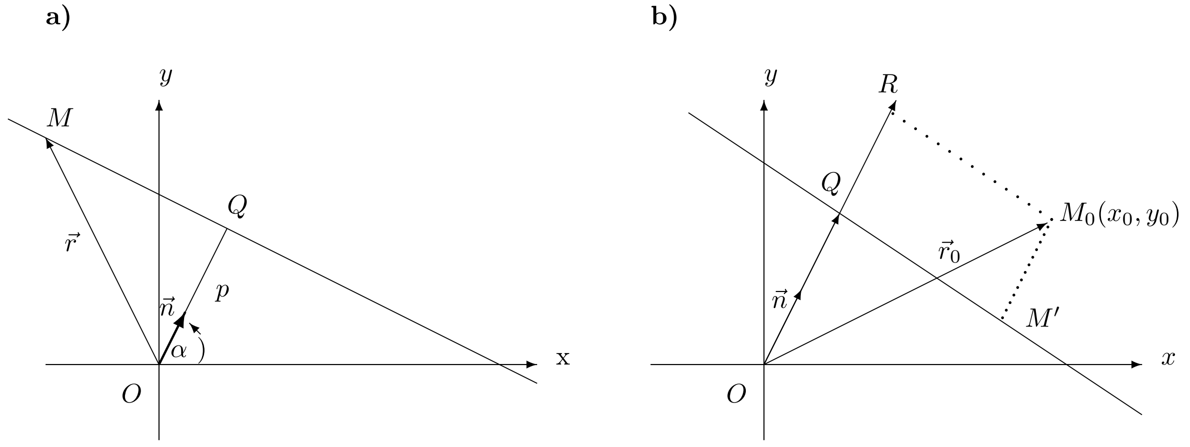


Рис.II.5. *Нормированное уравнение прямой и отклонение точки от прямой*

Отклонение вычисляется по формуле:

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p, \tag{II.12}$$

если (x_0, y_0) — координаты точки M_0.

9. Угол между прямыми. *Углом между прямыми называется угол между их направляющими (нормальными) векторами:*

$$\cos\widehat{d_1,\, d_2} = \frac{\left(\vec q_1 \cdot \vec q_2\right)}{|\vec q_1||\vec q_2|}; \quad \cos\widehat{d_1,\, d_2} = \frac{\left(\vec N_1 \cdot \vec N_2\right)}{|\vec N_1||\vec N_2|}. \tag{II.13}$$

Угол между прямыми определен с точностью до π.

10. Расстояние между параллельными прямыми. *Если уравнения двух параллельных прямых приведены к общим уравнениям с одинаковыми коэффициентами при неизвестных, то расстояние между прямыми вычисляется по формуле:*

$$\rho_{d_1,d_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{II.14}$$

II.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Прямые линии в пространстве

1. Теорема о взаимном расположении прямых в пространстве. *Две прямые $d_1(M_1,;\vec q_1)$ и $d_2(M_2;\vec q_2)$ в пространстве могут*

а. *лежать в одной плоскости при выполнении условия:*

$$\left(\vec q_1,\, \vec q_2,\, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = 0 \tag{II.15}$$

б. *скрещиваться при выполнении условия:*

$$\left(\vec q_1,\, \vec q_2,\, \overrightarrow{M_1M_2}\right) \neq 0. \tag{II.16}$$

2. *В случае (II.15), когда прямые лежат в одной плоскости, они могут*

а. *пересекаться при выполнении условия:*

$$\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right] \neq \vec{0}, \tag{II.17}$$

б. *быть параллельными при выполнении условий:*

$$\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right] = \vec{0}; \quad \left[\vec{q}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}, \tag{II.18}$$

в. *или совпадать при выполнении условий:*

$$\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right] = \vec{0}; \quad \left[\vec{q}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0}. \tag{II.19}$$

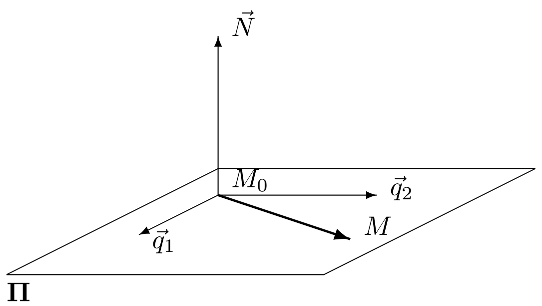
3. Расстояние между скрещивающимися прямыми. *Расстояние между скрещивающимися прямыми находится по формуле:*

$$\rho_{d_1,d_2} = \frac{\left|\left(\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{\left|\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right]\right|}. \tag{II.20}$$

4. Расстояние между параллельными прямыми. *Расстояние между параллельными прямыми в пространстве находится по формуле:*

$$\rho_{d_1\|d_2} = \frac{\left|\left[\vec{q}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right]\right|}{|\vec{q}_1\,|}. \tag{II.21}$$

II.4 Плоскости: определения и теоремы



$\Pi(M_0; \vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,)$

Рис.II.6. *Плоскость в пространстве*

Определение плоскости. *Плоскостью* $\Pi(M_0; \vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,)$, *проходящей через точку* M_0 *в двумерном направлении* $\{\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,\}$, *называется геометрическое место точек* M *пространства, таких что:*

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda_1\vec{q}_1 + \lambda_2\vec{q}_2\,, \tag{II.22}$$

где M_0 *— опорная точка плоскости,* $\vec{q}_1\,, \vec{q}_2$ *— направляющие векторы плоскости, которыми могут служить любые неколлинеарные векторы,* λ_1, λ_2 *— параметры, которые независимо пробегают все множество действительных чисел (см. Рис.II.6).*

Каждой паре значений параметров соответствует одна и только одна точка плоскости.

2. Параметрические уравнения плоскости. *Пусть в декартовой системе координат:*

$$M_0(X_0, y_0, z_0); \quad M(x, y, z); \quad \vec{q}_1 = (l_1, m_1, n_1); \quad \vec{q}_2 = (l_2, m_2, n_2).$$

Тогда параметрические уравнения плоскости $\Pi(M_0, \vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,)$ *принимают вид:*

$$\begin{cases} x &= \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2\,; \\ y &= \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2\,; \\ z &= \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 \end{cases}. \tag{II.23}$$

3. Другой вид уравнения плоскости. *Определение (II.22) можно записать в виде условия компланарности векторов* $\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,, \overrightarrow{M_0M}$*:*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{II.24}$$

4. Другое определение плоскости. *Плоскостью* $\Pi(M_0; \vec{N})$*, проходящей через точку* M_0 *перпендикулярно вектору* $\vec{N}$*, называется геометрическое место точек* M *пространства, таких что:*

$$\left(\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}\right) = 0. \tag{II.25}$$

Ненулевой вектор $\vec{N}$ *называется вектором нормали (нормальным вектором) плоскости* Π. *(См. Рис.II.6.)*

5. Общее уравнение плоскости. *Пусть нормальный вектор имеет координаты:*

$$\vec{N} = (A, B, C).$$

Тогда общее уравнение плоскости $\Pi(M_0; \vec{N})$ *согласно определению (4) можно записать в одном из эквивалентных видов:*

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \tag{II.26}$$

или:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{II.27}$$

6. Связь между вектором нормали и направляющими векторами:

$$\vec{N} = \left[\,\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\,\right]. \tag{II.28}$$

Формула (II.28) устанавливает соответствие между уравнениями плоскости (II.24) и (II.26).

7. Нормированное уравнение плоскости. *Нормированное уравнение плоскости получается умножением общего уравнения плоскости (II.27) на нормирующий множитель* μ *:*

$$\mu = -\operatorname{sgn}(D)\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{II.29}$$

(знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена) и имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{II.30}$$

где α, β, γ *- углы между нормалью плоскости, проведенной из начала координат, а* p *— расстояние от начала координат до плоскости:*

$$\cos\alpha = -sgn(D)\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\beta = -\operatorname{sgn}(D)\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$
$$\cos\gamma = -\operatorname{sgn}(D)\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{II.31}$$

Аналогично (II.12) определяется отклонение и расстояние точки от плоскости.

II.5 Взаимное расположение плоскостей

1. Теорема о взаимном расположении плоскостей. *Две плоскости $\Pi_1(M_1; \vec{N}_1)$ и $\Pi_2(M_2; \vec{N}_2)$ в трехмерном пространстве*

а. *могут пересекаться при:*

$$\left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right] \neq \vec{0}, \tag{II.32}$$

б. *быть параллельными при:*

$$\left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right] = \vec{0} \qquad \left(\vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \overrightarrow{M_1M_2} \right) \neq 0 \tag{II.33}$$

в. *или совпадать при:*

$$\left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right] = \vec{0} \qquad \left(\vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \overrightarrow{M_1M_2} \right) = 0. \tag{II.34}$$

2. *Если плоскости заданы своими общими уравнениями, то они пересекаются, если коэффициенты при координатах непропорциональны; параллельны, если:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \tag{II.35}$$

и совпадают, если:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{II.36}$$

3. Угол Θ между плоскостями. *Угол между плоскостями $\Pi_1(M_1; \vec{N}_1)$ и $\Pi_2(M_2; \vec{N}_2)$ определяется как угол между их нормальными векторами:*

$$\widehat{\Pi_1 \Pi_2} = \widehat{\vec{N}_1 \, \vec{N}_2} \Longrightarrow \cos\Theta = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right)}{|\vec{N}_1 || \vec{N}_2 |}. \tag{II.37}$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если:

$$\frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right)}{=} 0. \tag{II.38}$$

4. Прямая пересечения плоскостей. *Прямая d пересечения плоскостей $\Pi_1(M_1; \vec{N}_1)$ и $\Pi_2(M_2; \vec{N}_2)$ есть $d(M_0; \vec{q})$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - любая общая точка этих плоскостей, а направляющий вектор $\vec{q}$ равен:*

$$\vec{q} = \left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right]. \tag{II.39}$$

5. Расстояние между параллельными плоскостями. *Пусть общие уравнения параллельных плоскостей приведены к виду с одинаковыми коэффициентами при координатах:*

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D_1 &= 0\,; \\ Ax + By + Cz + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда расстояние между плоскостями находится по формуле:

$$\rho_{\Pi_1 \Pi_2} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{II.40}$$

II.6 Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Теорема о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве. *Прямая $d(M_1; \vec{q})$ может:*

а. *пересекаться с плоскостью $\Pi(M_2; \vec{N})$ в единственной точке при:*

$$\left(\vec{q}\, \vec{N} \right) \neq 0; \tag{II.41}$$

б. *быть параллельной этой плоскости при:*

$$\left(\vec{q}\, \vec{N} \right) = 0 \qquad \left[\vec{q} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right] \neq \vec{0}, \tag{II.42}$$

в. *лежать в этой плоскости при:*

$$\left(\vec{q}\, \vec{N} \right) = 0 \qquad \left[\vec{q} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right] = \vec{0}. \tag{II.43}$$

2. Угол между прямой и плоскостью. *Углом α между прямой $d(M_1; \vec{q})$ и плоскостью $\Pi(M_2; \vec{N})$ называется угол между направляющим вектором этой прямой и его ортогональной проекцией на плоскость Π. Таким образом:*

$$\sin\alpha = \frac{\left(\vec{q}\, \vec{N} \right)}{|\vec{q}||\vec{N}|}. \tag{II.44}$$

3. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью. *Расстояние между прямой и плоскостью можно определить, как расстояние от опорной точки прямой до плоскости:*

$$\rho_{d,\Pi} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{II.45}$$

или как длину проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на направление нормали $\vec{N}$:

$$\rho_{d,\Pi} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{N} \right)\right|}{|\vec{N}|} = \frac{\left|\left(\vec{q}_1\, , \, \vec{q}_2\, , \, \overrightarrow{M_1M_2} \right)\right|}{|\vec{N}|}. \tag{II.46}$$

II.7 Евклидовы задачи планиметрии

Пример III.1. *Прямая d_1 проходит через точку $A(1, 2)$ в направлении $\vec{q} = (3, -4)$, прямая d_2 задана своим общим уравнением:*

$$4x + 3y - 15 = 0,$$

а прямая d_3 своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{3}.$$

Провести полное исследование взаимного расположения прямых d_1 и d_2 и d_1 и d_3.

<u>Решение</u>

Направляющий вектор прямой d_1 есть $\vec{q} = (3, -4)$, а, значит, ее нормальный вектор $\vec{N_1} = (4, 3)$. Нормальный вектор прямой d_2 есть

$$\vec{N_2} = (4, 3),$$

- значит, эти прямые параллельны или совпадают. Запишем общее уравнение прямой d_1:

$$4(x-1) + 3(x-2) = 0 \Longrightarrow 4x + 3y - 10 = 0.$$

Так как свободные члены общих уравнений прямых не пропорциональны, прямые d_1 и d_2 параллельны. Расстояние между ними равно:

$$\rho_{d_1, d_2} = \frac{|-15 - (-10)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Прямая d_3 проходит через точку $(2, 3)$ в направлении $(4, 3)$, поэтому вектор нормали этой прямой есть $\vec{N_3} = (-3, 4)$, а ее общим уравнением будет:

$$-3(x-2) + 4(y-3) = 0 \Longrightarrow -3x + 4y - 2 = 0.$$

Так как:

$$\left(\vec{N_1} \cdot \vec{N_3}\right) = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0,$$

то прямые d_1 и d_3 перпендикулярны. Точка их пересечения находится совместным решением двух уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 3y - 10 & = & 0\,; \\ -3x + 4y - 2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Решая эту систему, найдем точку пересечения:

$$M\left(\frac{34}{25}, \frac{38}{25}\right).$$

Пример ПI.2. *Пронормировать уравнение прямой $x - y + 1 = 0$.*

<u>Решение</u>

Так как свободный член положителен, то нормирующий множитель будет равен

$$-\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому нормированное уравнение имеет вид:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Пример ПI.3. *Найти расстояние от точки $P(1, -2)$ до прямой $2x + y - 3 = 0$.*

<u>Решение</u>

Нормируем данное уравнение:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0.$$

Подставляем координаты точки $P(1, -2)$. Получим, что

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) - \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Пример III.4. *Найти уравнение биссектрис углов, образованных пересечением прямых $x-2y+1=0$ и $2x+y-2=0$.*

Решение

Нормируем прямые. Имеем
$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$$
и
$$\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}=0.$$
Для одинаковых знаков δ получим, что
$$-\frac{3}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}}=0$$
или $y=3x-1$.

Для разных знаков δ получим, что
$$\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{3}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0,$$
т.е. $x+3y-3=0$ или $y=-\dfrac{1}{3}x+1$.

Пример III.5. *Через точку пересечения прямых $x-y+1=0$ и $2x+y+1=0$ проходит прямая , параллельная прямой $3x+y+1=0$. Написать ее уравнение.*

Решение

Имеем $\lambda(x-y+1)+\mu(2x+y+1)=0$ или $(\lambda+2\mu)x+(-\lambda+\mu)y+\lambda+\mu=0$. Условие параллельности: $\lambda+2\mu=3$ и $-\lambda+\mu=1$, т. е. $\lambda=\dfrac{1}{3}$, $\mu=\dfrac{4}{3}$. Ответ: $3x+y+\dfrac{5}{3}=0$.

Пример III.6. *На плоскости дан треугольник ΔABC своими вершинами:*
$$A(1,2);\quad B(4,6);\quad C(8,3).$$
Найти уравнения высоты, медианы и биссектрисы, выходящих из вершины B, а также длину этой высоты и угол $\angle B$.

Решение

1.Найдем векторы, соответствующие сторонам треугольника:
$$\overrightarrow{AB}=(3,4);\quad \overrightarrow{BC}=(4,-3);\quad \overrightarrow{AC}=(7,1).$$
Так как
$$\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=3\cdot 4+4\cdot(-3)=0,$$
то угол B прямой: $\angle B=\frac{\pi}{2}$.

2. Найдем уравнение высоты. *Уравнение высоты (BD) получается как уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно вектору $\vec{N} = \overrightarrow{AC}$:*

$$\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}\right) = 0 \Longrightarrow 7(x-4) + 1(y-6) = 0 \Longrightarrow$$

$$(AC):\ 7x + y - 34 = 0.$$

3. Найдем высоту h. *Учтем, что вектор нормали к прямой (AC) получается из координат этого вектора по правилу:*

$$\vec{q} = (l, m) \Longrightarrow \vec{N} = (-m, l).$$

Таким образом, найдем вектор нормали:

$$\vec{N}_1 = (-1, 7)$$

и уравнение прямой (AC):

$$(AC):\ -1(x-1) + 7(y-2) = 0 \Longrightarrow -x + 7y - 13 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормированному виду ($\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$):

$$(AC):\ -\frac{1}{5\sqrt{2}}x + \frac{7}{5\sqrt{2}}y - \frac{13}{5\sqrt{2}} = 0.$$

Таким образом, отклонение точки B от прямой (AC) равно:

$$\delta_B = \frac{-1 \cdot 4 + 7 \cdot 6 - 13}{5\sqrt{2}} = \frac{14}{5\sqrt{2}}.$$

Это и будет длиной высоты h.

4. Найдем уравнение медианы. *Найдем координаты середины отрезка $[AC]$, точки E:*

$$x_E = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}; \quad y_E = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Таким образом:

$$\overrightarrow{BE} = (\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \Longrightarrow \vec{q} = (1, -7).$$

Запишем уравнение медианы (BE):

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-7} \Longrightarrow 7x + y - 34 = 0.$$

5. Найдем уравнение биссектрисы. *Биссектрису d_1 угла B определим как геометрическое место точек, равноудаленных от прямых (AB) и (BC). Запишем уравнения прямых (AB) и (CD):*

$$(AB):\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \Longrightarrow 4x - 3y + 2 = 0;$$

$$(BC):\ \frac{x-4}{4} = \frac{y-6}{-3} \Longrightarrow 3x + 4y - 36 = 0.$$

Нормируем эти уравнения:

$$(AB):\ \frac{-4x + 3y - 2}{5} = 0;$$

$$(BC):\ \frac{3x + 4y - 36}{5} = 0.$$

Таким образом, биссектрисы угла B (их две) определятся уравнениями:

$$\delta_{d_1,(AB)} = \pm\delta_{d_1,(BC)}.$$

Нам необходимо выбрать знак, соответствующий биссектрисе внутреннего угла треугольника — в этом случае отклонения имеют разные знаки. Таким образом, найдем уравнение биссектрисы:

$$d_1 : x - 7y + 38 = 0.$$

II.8 Евклидовы задачи стереометрии

Пример III.7. *Лежат ли прямые*

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}, \qquad \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{0}$$

в одной плоскости?

Решение

Проверяем условие (II.15), для этого вычисляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 4 = 36 \neq 0.$$

Прямые являются скрещивающимися и в одной плоскости не лежат.

Пример III.8. *Исследовать взаимное расположение прямых $d_1(M_1, \vec{q}_1)$ и $d_2(M_2, \vec{q}_2)$, если:*

$$M_1(1,2,5); \quad \vec{q}_1 = (-2,1,2); \quad M_2(5,6,3); \quad \vec{q}_2 = (-1,2,2).$$

Решение

1. Выясним, лежат ли две прямые в одной плоскости. *Найдем вектор*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4,4,-2) = 2(2,2,-1)$$

и вычислим смешанное произведение:

$$\left(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Таким образом, прямые d_1 и d_2 — скрещивающиеся.

2. Найдем расстояние между прямыми. *Для этого сначала вычислим векторное произведение:*

$$\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2,2,-3).$$

Найдем теперь расстояние:

$$\rho_{d_1,d_2} = \frac{|\left(\vec{q}_1\,,\,\vec{q}_2\,,\,\overrightarrow{M_1M_2}\right)|}{|\left[\,\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\,\right]|} = \frac{6}{\sqrt{17}}.$$

3. Найдем косинус угла между прямыми. *Косинус угла вычислим по формуле:*

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\right)}{|\vec{q}_1\,||\vec{q}_2\,|} = \frac{8}{9}.$$

Пример ПI.9. *Найти расстояние от точки $M(1,-1,2)$ до плоскости $3x-y+z+1=0$.*

<u>Решение</u>

Нормируем уравнение плоскости:

$$-\frac{3x}{\sqrt{11}} + \frac{y}{\sqrt{11}} - \frac{z}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}} = 0.$$

Получаем:

$$d = \left|-\frac{3}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{2}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}}\right| = \frac{7}{\sqrt{11}}.$$

Пример ПI.10. *Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,2,-2)$ и параллельно плоскости $3x+2y-z+1=0$.*

<u>Решение</u>

Нормальный вектор $\vec{N}_1$ имеет координаты $(3,2,-1)$. За нормальный вектор искомой плоскости можно взять (ради простоты решения) вектор, совпадающий с $\vec{N}_1$. Поэтому имеем $3(x-1)+2(y-2)-(z+2)=0$ или $3x+2y-z-9=0$.

Пример ПI.11. *Найти уравнение множества плоскостей, проходящих через точку $M_0(1;2;-2)$ и перпендикулярных к плоскости $3x+2y-z+1=0$.*

<u>Решение</u>

Из условия перпендикулярности (II.38) следует $3A_2+2B_2-C_2=0$. Находим $C_2=3A_2+2B_2$ и подставим в уравнение $A_2(x-1)+B_2(y-2)+C_2(z+2)=0$. Окончательно имеем: $A_2x+B_2y+(3A_2+2B_2)z=5A_2-2B_2$ — параметрическое семейство плоскостей.

Пример ПI.12. *Исследовать взаимное расположение плоскостей:*

$$\Pi:\ 4x-2y+4z+25=0$$

и прямых:

$$d_1:\ \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{1},$$

$$d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Решение

1. Найдем координаты необходимых нам векторов. *По коэффициентам уравнений восстановим нормальный вектор плоскости $\vec{N}$ и направляющие векторы прямых $\vec{q_1}, \vec{q_2}$:*

$$\vec{N} = (4, -2, 4) \Longrightarrow \vec{N} = (2, -1, 2);$$

$$\vec{q_1} = (1, 4, 1); \qquad \vec{q_2} = (2, 1, -2).$$

2. Найдем координаты опорной точки плоскости. *Для этого найдем любое решение уравнения плоскости. Например, можно положить: $x = z = 0$, тогда найдем $y = 25/2$. Таким образом,*

$$M_0 = (0, \frac{25}{2}, 0)$$

является опорной точкой плоскости.

3. Найдем скалярные произведения.

$$\left(\vec{q_1} \cdot \vec{N}\right) = 0,$$

таким образом, прямая d_1 параллельна плоскости или лежит в ней.

$$\left(\vec{q_2} \cdot \vec{N}\right) = -1 \neq 0,$$

Следовательно, прямая d_2 пересекается с плоскостью в точке.

4. Вычислим вектор, соединяющий опорные точки Π и d_1:

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = \left(4, -\frac{17}{2}, 1\right).$$

Очевидно, что этот вектор не коллинеарен направляющему вектору прямой $\vec{q_1}$, следовательно, прямая d_1 параллельна плоскости Π.

5. Найдем расстояние от прямой до плоскости. *Для этого нормируем уравнение плоскости ($\mu = -1/6$):*

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{25}{6} = 0.$$

Отклонение точки M_1 от плоскости равно:

$$\delta_{M_1} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{25}{6} = -\frac{29}{6}$$

Таким образом, расстояние от прямой d_1 до плоскости равно: $\rho = 29/6$.

6. Найдем точку пересечения F прямой d_2 с плоскостью. *Для этого запишем уравнения прямой в параметрическом виде:*

$$\begin{aligned} x &= 3+2t\,; \\ y &= 1+t\,; \\ z &= 1-2t \end{aligned}$$

и подставим переменные x, y, z в уравнение плоскости:

$$4(3+2t)-2(1+t)+4(1-2t)+25=0,$$

откуда найдем:

$$t=\frac{39}{2}.$$

Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения:

$$F=\left(42, \frac{41}{2}, -38\right).$$

7. Найдем угол между прямой d_2 и плоскостью. *Угол вычисляем по формуле:*

$$\sin\alpha=\frac{\left(\vec{q}_2\,\cdot\,\vec{N}\right)}{|\vec{q}_2\,||\vec{N}|}.$$

Таким образом получим:

$$\sin\alpha=\frac{4-1-4}{3\cdot 3}=-\frac{1}{9}.$$

Пример ПІІ.13. *Исследовать взаимное расположение плоскостей:*

$$\Pi_1:\ 2x-2y+z-21=0;$$

$$\Pi_2:\ x+2y-2z+9=0.$$

1. Найдем нормальные векторы плоскостей.

$$\vec{N}_1\ =(2,-2,1);\qquad \vec{N}_2\ =(1,2,-2).$$

2. Вычислим векторное произведение нормальных векторов.

$$\vec{q}=\left[\vec{N}_1\ \cdot\ \vec{N}_2\ \right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=(2,5,6).$$

Векторы неколлинеарны, значит плоскости пересекаются по прямой.

3. Найдем прямую пересечения. *Для этого найдем ее опорную точку — какое-либо совместное решение уравнений плоскостей. Положим, например, $z=0$. Тогда уравнения плоскостей примут вид:*

$$2x-2y-21=0;\ x+2y+9=0\Longrightarrow 3x-12=0\Longrightarrow x=4; y=-\frac{13}{2}.$$

Таким образом,

$$M_0 = (4, -\frac{13}{2}, 0).$$

Направляющий вектор прямой пересечения есть вектор $\vec{q}$. Запишем канонические уравнения прямой:

$$d = \Pi_1 \cap \Pi_2 : \ \frac{x-4}{2} = \frac{y + \dfrac{13}{2}}{5} = \frac{z}{6}.$$

4. Найдем угол между плоскостями. *Косинус этого угла равен:*

$$\cos\Theta = \frac{\left(\vec{N}_1 \ \cdot \ \vec{N}_2\right)}{|\vec{N}_1\,||\vec{N}_2\,|} = 0.$$

Таким образом, плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются под прямым углом.

Глава III

Кривые II-го порядка на евклидовой плоскости

III.1 Основные факты теории кривых II-го порядка

Существуют три и только три типа кривых второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. При надлежащем выборе декартовой системы координат их уравнения можно записать в следующих канонических формах.

1. Каноническое уравнение эллипса. *Пусть a и b - положительные параметры. Тогда каноническое уравнение эллипса имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{III.1}$$

2. Каноническое уравнение гиперболы. *Каноническое уравнение гиперболы с главной осью Ox имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{III.2}$$

а каноническое уравнение сопряженной гиперболы (с главной осью Oy) имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{III.3}$$

3. Каноническое уравнение параболы. *Пусть p — положительный параметр. Тогда каноническое уравнение параболы с осью Ox имеет вид:*

$$y^2 = 2px. \tag{III.4}$$

Элементы кривых второго порядка

1. Элементы эллипса *Главной осью эллипса является его бóльшая ось. Пусть $a > b$. В этом случае главной осью эллипса является ось Ox. Введем число*

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} < a, \tag{III.5}$$

а также число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1, \tag{III.6}$$

которое называется эксцентриситетом эллипса. Введем на главной оси эллипса две точки:

$$F_1(-c, 0) \qquad F_2(c, 0),$$

которые называются фокусами эллипса. В случае, когда $b > a$ числа c и ε вычисляются по формулам (III.5) и (III.6), в которых необходимо поменять местами числа a и b. Главной осью в этом случае будет ось Oy, на которой и будут расположены фокусы.

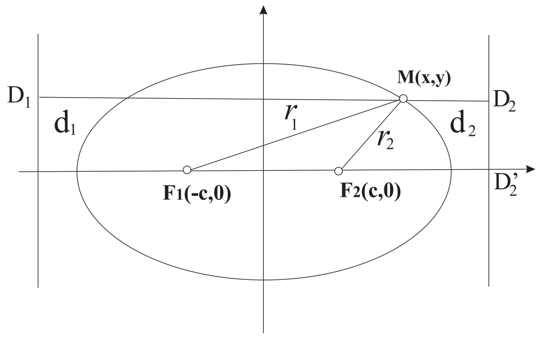


Рис.III.7. *Элементы эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Директрисы эллипса. *Прямые d_1, d_2, перпендикулярные главной оси эллипса:*

$$d_{1,2}: \qquad x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \quad (= \pm\frac{a^2}{c}) \qquad \text{(III.7)}$$

называются директрисами эллипса.

3. Касательные к эллипсу. *Каноническое уравнение касательной к эллипсу с точкой касания $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \qquad \text{(III.8)}$$

4. Элементы гиперболы *Главной осью гиперболы является та, которой соответствует знак + в каноническом уравнении гиперболы. Введем число*

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} > a, b, \qquad \text{(III.9)}$$

а также число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1, \qquad \text{(III.10)}$$

которое называется эксцентриситетом эллипса. Введем на главной оси гиперболы две точки:

$$F_1(-c, 0) \qquad F_2(c, 0),$$

которые называются фокусами гиперболы. Прямые d_1, d_2, перпендикулярные главной оси гиперболы:

$$d_{1,2}: \qquad x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \quad (= \pm\frac{a^2}{c}) \qquad \text{(III.11)}$$

называются директрисами гиперболы.

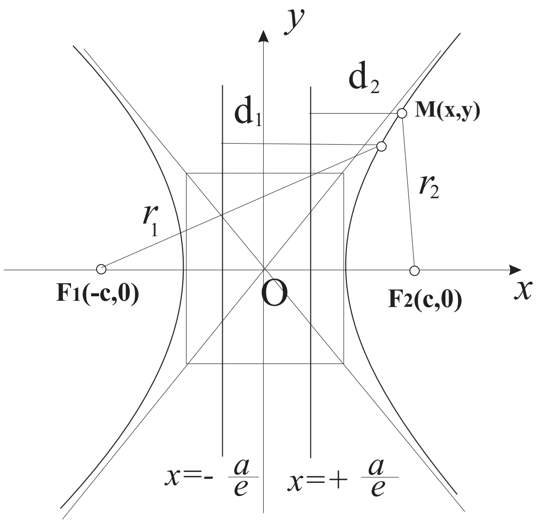


Рис.III.8. *Элементы гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Директрисы эллипса.

5. Касательные к гиперболе. *Каноническое уравнение касательной к гиперболе с точкой касания $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \qquad \text{(III.12)}$$

6. Асимптоты гиперболы. *Прямые:*

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad \text{(III.13)}$$

являются асимптотами гиперболы.

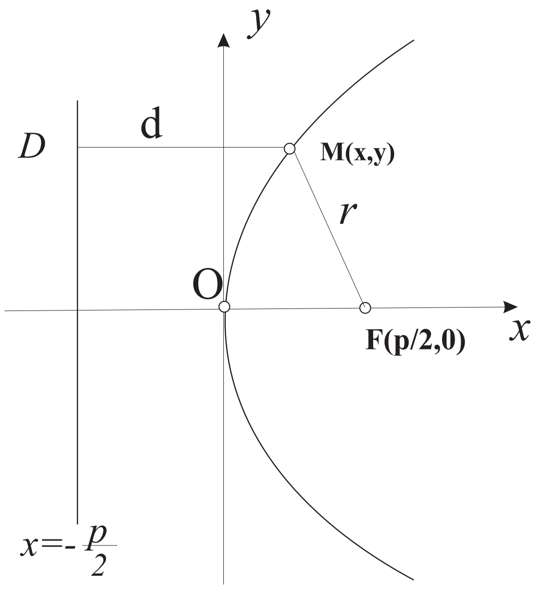


Рис.III.9. *Парабола $y^2 = 2px$*

7. Элементы параболы *Точка $M(p/2, 0)$ называется фокусом параболы, а прямая d, перпендикулярная его оси:*

$$d: \qquad x = -\frac{p}{2}, \qquad \text{(III.14)}$$

называется директрисой параболы. Каноническое уравнение касательной к параболе с точкой касания $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$yy_0 = p(x + x_0). \qquad \text{(III.15)}$$

III.2 Фокальные свойства кривых II-го порядка

1. Фокальное свойство эллипса. *Введем фокальные радиусы точки M кривой II-го порядка:*

$$\rho_{1,2} = |\overrightarrow{F_{1,2}M}|. \qquad \text{(III.16)}$$

Тогда имеет место утверждение: Сумма фокальных радиусов эллипса есть величина постоянная, равная большой оси эллипса:

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a. \tag{III.17}$$

2. Фокальное свойство гиперболы. *Для гиперболы имеет место аналогичное утверждение: Модуль разности фокальных радиусов эллипса есть величина постоянная, равная главной оси гиперболы:*

$$|\rho_1 - \rho_2| = 2a. \tag{III.18}$$

Для параболы аналогичное свойство отсутствует.

III.3 Директориальные свойства кривых II-го порядка

Директориальные свойства всех кривых II-го порядка совпадают;

1. *Отношение фокального радиуса любой точки кривой второго порядка к расстоянию d от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой:*

$$\frac{|\overrightarrow{FM}|}{d} = \varepsilon. \tag{III.19}$$

III.4 Оптические свойства кривых II-го порядка

1. Оптическое свойства эллипса. *Луч света, испущенный из одного из фокусов эллипса, после отражения от эллипса проходит через второй его фокус.*

2. Оптическое свойства гиперболы. *Луч света, испущенный из одного из фокусов гиперболы, после отражения от гиперболы распространяется так, как если бы он был испущен из второго ее фокуса.*

3. Оптическое свойства параболы. *Луч света, испущенный из из фокуса параболы, отражается от параболы параллельно ее оси.*

Полярное уравнение кривых второго порядка

1. *Если поместить полюс полярной системы координат в фокус кривой второго порядка, а в качестве полярной оси выбрать главную ось этой кривой, то уравнение кривой II-го порядка можно записать в полярных координатах в виде:*

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{III.20}$$

III.5 Задачи о кривых II-го порядка

Пример ПIII.1. *Найти элементы эллипса, заданного каноническим уравнением:*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Решение

Находим:

$$a = \sqrt{9} = 3; \quad b = \sqrt{25} = 5.$$

Таким образом, $b > a$ — фокусы эллипса лежат на оси Oy:

$$c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4; \qquad F_1(0, -4); \qquad F_2(0, 4).$$

Эксцентриситет эллипса равен:

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}.$$

Уравнения директрис (директрисы будут параллельны оси Ox):

$$d_{1,2}: \; y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{25}{4}.$$

Пример ПIII.2. *Написать уравнение касательной к эллипсу* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, *которая была бы перпендикулярна прямой* $2x - 3y + 1 = 0$.

Решение

Условие перпендикулярности прямой $Ax + By + C = 0$ и прямой
$2x - 3y + 1 = 0$ записывается в виде $2A - 3B = 0$ $\left(A = \dfrac{3}{2}B\right)$, а условия касания: $25A^2 + 16B^2 = C^2$. Решая совместно данные условия, получим $\left(25 \cdot \dfrac{9}{4} + 16\right) B^2 = C^2$, т.е. $C = \pm\dfrac{17}{2}B$. Подставляя в уравнение прямой значения параметров $A = \dfrac{3}{2}B$, $C = \pm\dfrac{17}{2}B$ и сокращая на общий множитель $\dfrac{1}{2}B$, получим два решения задачи: $3x + 2y \pm 17 = 0$.

Пример ПIII.3. *Известно, что прямая*

$$d: \; 3x - 4y + 5 = 0$$

является директрисой эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon = 1/2$ *и что точка* $F_1(-5, 10)$ *является соответствующим фокусом эллипса. Найти уравнение эллипса и его элементы.*

Решение

Нормируем уравнение директрисы:

$$\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

Отклонение фокуса F_1 от директрисы равно:

$$\delta_{F_1} = (-5)\frac{-3}{5} + 10\frac{4}{5} - 1 = 10.$$

Таким образом, расстояние от фокуса F_1 до соответствующей директрисы равно 10. Но с другой стороны расстояние от фокуса до соответствующей директрисы равно:

$$\frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

Из соотношения

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{2}$$

получаем:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Подставляя этот результат в выражение для расстояния от фокуса до директрисы, найдем:

$$a = \frac{10}{3}; \quad b = \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad c = \frac{5}{3}.$$

Направляющий вектор директрисы равен:

$$\vec{q} = (4, 3),$$

поэтому уравнение главной оси эллипса есть:

$$4(x+5) + 3(y-10) = 0 \Longrightarrow 4x + 3y - 10 = 0.$$

Пусть теперь $M(x_0, y_0)$ - произвольная точка эллипса. Тогда отклонение этой точки от данной директрисы есть:

$$\delta_M = \frac{-3}{5}x_0 + \frac{4}{5}y_0 - 1,$$

а соответствующее расстояние равно:

$$\rho_{M_0} = \left| \frac{-3}{5}x_0 + \frac{4}{5}y_0 - 1 \right|.$$

Расстояние от фокуса до точки M_0 равно:

$$\rho_1 = \sqrt{(x_0 + 5)^2 + (y - 10)^2}.$$

Из директориального свойства эллипса получим:

$$\rho_1^2 = \varepsilon^2 \rho_{M_0}^2.$$

Таким образом, подставляя сюда найденные выражения, получим:

$$(3x_0 - 4y_0 + 5)^2 = \frac{25}{4}\left((x_0 + 5)^2 + (y_0 - 10)^2\right).$$

Перенося все члены в одну часть уравнения, получим уравнение второго порядка относительно переменных (x_0, y_0) — это и будет искомое уравнение эллипса. Поскольку полученное уравнение весьма громоздко, мы не будем его приводить здесь. Отметим лишь, что в канонической системе координат, в которой ось Ox направлена вдоль вектора $\vec{N} = (-4, 3)$ (а начало координат нетрудно найти, зная элементы эллипса), каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{3x'^2}{25} + \frac{9y'^2}{100} = 1.$$

Глава IV

Аффинные пространства

IV.1 Аксиомы Вейля и теоремы

Аксиомы Вейля аффинного пространства

Пусть $\mathbf{A} \neq \emptyset$ - множество элементов произвольной природы, называемых *точками* и обозначаемых $A\,, B\,, C\,, \ldots$. Наряду с этим множеством рассмотрим векторное пространство V.

Определение OIV.1. *Множество $\mathbf{A} \neq \emptyset$ называется аффинным пространством над векторным пространством V, если задано отображение, сопоставляющее любой упорядоченной паре точек из $\mathbf{A}$ некоторый вектор из V:*

$$g : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow V \tag{IV.1}$$

и удовлетворяющее двум аксиомам (аксиомам Вейля):

Аксиома AIV.1. **(1 аксиома Вейля)** *Для любой точки $A \in \mathbf{A}$ и любого вектора $\vec{a} \in V$ существует единственная точка $B \in \mathbf{A}$, для которой:*

$$g(A, B) = \vec{a}\,; \tag{IV.2}$$

(в дальнейшем будем обозначать $g(a, B) = \overrightarrow{AB}$);

Аксиома AIV.2. **(2 аксиома Вейля)** *Для любых трех точек $A, B, C \in \mathbf{A}$ имеет место равенство:* [1]

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,; \qquad (\forall A, B, C \in \mathbf{A})\,. \tag{IV.3}$$

Векторное пространство V называется направляющим пространством аффинного пространства $\mathbf{A}$, или - пространством переносов аффинного пространства $\mathbf{A}$.

Следствия аксиом Вейля

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}\,. \tag{IV.4}$$

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}\,, \qquad \forall A \in \mathbf{A}\,. \tag{IV.5}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}\,, \qquad \forall A, B \in \mathbf{A}\,. \tag{IV.6}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B\,. \tag{IV.7}$$

[1] Правило треугольника.

Определение OIV.2. *Размерностью аффинного пространства* $\mathbf{A}$ *называется размерность его ассоциированного векторного пространства* V*:*

$$\dim \mathbf{A} \overset{def}{=} \dim V\,. \tag{IV.8}$$

Аффинное пространство размерности n обозначается $\mathbf{A}_n$. Раздел математики, изучающий аффинные пространства, называется *аффинной геометрией.* Базой аксиоматики аффинной геометрии является множество точек $\{\mathbf{A}\}$ (основное множество), множество векторов $\{V\}$ и множество чисел $\{\mathcal{R}\}$ (вспомогательные множества). На множествах $V\,,\mathcal{R}$ заданы тернарные отношения сложения векторов и умножения векторов на числа, удовлетворяющие аксиомам векторного пространства; на множествах $\mathbf{A}\,,V$ задано тернарное отношение (IV.1), удовлетворяющее аксиомам аффинного пространства [AIV.1], [AIV.2].

IV.2 Аффинный репер и аффинные преобразования

Изоморфизм аффинных пространств

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ - аффинные пространства, а V и V' - соответствующие пространства переносов и пусть существует изоморфизм $f\,:V\longrightarrow V'$.

Определение OIV.3. *Изоморфизмом пространства* $\mathbf{A}$ *на пространство* $\mathbf{A}'$ *называется биективное отображение:*

$$\Psi\,:\mathbf{A}\longrightarrow \mathbf{A}'\,|\,f(\overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{AB}\,,\quad \forall A,B\in\mathbf{A}\,, \tag{IV.9}$$

где $A' = \Psi(A)\in\mathbf{A}$, $B'=\Psi(B)\in af$ *- образы точек* $A\,,B$.

Пространства $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$ *называются изоморфными, если существует хотя бы один изоморфизм (IV.9).*

Аффинный репер и аффинные координаты точки

Определение OIV.4. *Упорядоченное множество* $n+1$ *точек*
$\Re\{O,A_1,A_2,\ldots,A_n\}\in\mathbf{A}_n$, *таких, что векторы*

$$\overrightarrow{OA_i} = \vec{e}_i\,\in V_n \qquad (i=\overline{1,n}) \tag{IV.10}$$

образуют базис пространства переносов V_n, *называется аффинной системой координат, или аффинным репером. Точка* O *называется началом координат.*

Определение OIV.5. *Система из* $n+1$ *точек* $A_0\,,A_1\,,\,\ldots,A_n\in\mathbf{A}_n$ *называется точками общего положения, если векторы* $\overrightarrow{A_0A_1}\,,\overrightarrow{A_0A_2},\,\ldots,\overrightarrow{A_0A_n}$ *образуют базис* V_n.

Под аффинным репером можно понимать и совокупность начала координат $O\in\mathbf{A}_n$ и базиса $\{\vec{e}_i\,\}_n\in V_n$: $\Re\{O;\vec{e}_1\,,\ldots,\vec{e}_n\,\}$. Выбор координатной системы в $\mathbf{A}_n$ - это выбор изоморфизма $\Psi\,:\mathbf{A}_n\longrightarrow\mathbf{A}(\mathcal{R}_n)$.

Определение OIV.6. *Вектор* $\overrightarrow{OM}\,\in V_n$ *называется радиусом-вектором точки* $M\in\mathbf{A}_n$ *относительно начала координат* $O\in\mathbf{A}$.

Определение OIV.7. $\Re\{O;\vec{e}_1\,,\ldots,\vec{e}_n\,\}$ *называют координаты ее радиуса-вектора:*

$$\overrightarrow{OM}=x^i\vec{e}_i \tag{IV.11}$$

и пишут: $M(x^1,x^2,\ldots,x^n)$.

Пусть аффинными координатами точек A и B в репере $\Re\{O;\vec{e}_1\,,\ldots,\vec{e}_n\,\}$ будут $A(a^1,a^2,\ldots,a^n)$ и $B(b^1,b^2,\ldots,b^n)$, т.е., согласно [OIV.7] имеет место соотношения:

$$\overrightarrow{OA}=a^i\vec{e}_i\ ; \qquad \overrightarrow{OB}=b^i\vec{e}_i\ . \tag{IV.12}$$

С другой стороны, согласно [OIV.7], упорядоченной паре точек (A,B) в пространстве переносов V_n соответствует вектор $\overrightarrow{AB}$.

Теорема TIV.1. *Аффинные координаты вектора* $\overrightarrow{AB}$ *равны разности аффинных координат точек, соответствующих концу и началу вектора:*

$$\overrightarrow{AB}=(x^1_B-x^1_A\,,x^2_B-x^2_A\,,\ldots,x^n_B-x^n_A)\,. \tag{IV.13}$$

Аффинные преобразования

Определение OIV.8. *Изоморфизм* $f\,:\mathbf{A}_n\longrightarrow\mathbf{A}_n$ *аффинного пространства* $\mathbf{A}_n$ *на себя называется автоморфизмом, или аффинным преобразованием этого пространства.*

Для задания автоморфизма в $\mathbf{A}_n$ достаточно задать два репера $\Re\{O;\vec{e}_1\,,\ldots,\vec{e}_n\,\}$ и $\Re\{O';\vec{e'}_1\,,\ldots,\vec{e'}_n\,\}$ и каждой точке $M\in\mathbf{A}_n$, имеющей координаты $\{x^i\}$ в репере $\Re$, поставить в соответствие точку M' с теми же координатами в репере $\Re'$:

$$f\,:M\longrightarrow M'\,|\,\overrightarrow{OM}=x^i\vec{e}_i\ \longrightarrow\overrightarrow{O'M'}=x^i\vec{e'}_i\ ,\quad \forall M\in\mathbf{A}_n\,. \tag{IV.14}$$

Таким образом с учетом определения координат точки аффинное преобразование определяется аналогично автоморфизму пространства переносов:

$$x'^k=x^iC'^k_i+x^k_{O'}\,, \tag{IV.15}$$

или в матричном виде:

$$[\vec{x}]\,'=C^{-1}[\vec{x}]+[\vec{x}_{O'}]\,, \tag{IV.16}$$

где C^{-1}— матрица, обратная к матрице перехода C.

Таким образом:

> Аффинными преобразованиями являются произвольные невырожденные линейные преобразования вида (IV.15), связывающие координаты образа точки с координатами ее прообраза по отношению к одному и тому же аффинному реперу.

IV.3 Прямая линия в $\mathbf{A}_n$

Определение OIV.9. *Прямой линией* $d\in\mathbf{A}$*, проходящей через точку* $M_0\in\mathbf{A}$ *параллельно ненулевому вектору* $\vec{q}\in V$*, называется множество всех точек* $M\in\mathbf{A}$*, таких, что:*

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{q}, \qquad \{\lambda\}=\mathcal{R}\,. \tag{IV.17}$$

Точка M_0 называется опорной точкой прямой, вектор $\vec{q}$ - направляющим вектором этой прямой, λ - параметром, пробегающим все множество $\mathcal{R}$.

Опорной точке M_0 соответствует значение параметра $\lambda = 0$. Прямая d, проходящая через точку M_0 параллельно вектору $\vec{q}$, обозначается как $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$.

Теорема TIV.2. *Пусть M_1 - произвольная точка прямой $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$ и $\vec{q}_1$ - произвольный ненулевой вектор, коллинеарный вектору $\vec{q}$. Тогда точка M_1 и вектор $\vec{q}_1$ задают ту же прямую:*

$$d(M_1;\ \overrightarrow{q_1}) = d(M_0;\ \overrightarrow{q})\,.$$

Теорема TIV.3. *Через две различные точки M_0 и $M_1 \in \mathbf{A}$ проходит одна и только одна прямая.*

Эта прямая обозначается символом (M_0M_1).

IV.4 Простое отношение трех точек

Определение OIV.10. *Говорят, что точка M делит отрезок $[M_1M_2]$ в отношении λ, если имеет место соотношение:*

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}\,, \tag{IV.18}$$

Число $\lambda \neq -1$ называется простым отношением трех точек: $M_1\,, M\,, M_2$.

При этом пишут:

$$(M_1M_2, M) = \lambda. \tag{IV.19}$$

Определение OIV.11. *Говорят, что точка M лежит между точками M_1 и M_2, если:*

$$(M_1M_2, M) > 0; \tag{IV.20}$$

при этом пишут:

$$\mu(M_1MM_2) \Longleftrightarrow (M_1M_2, M) > 0. \tag{IV.21}$$

Определение отрезка. *Отрезком с концами в точках M_1 и M_2 ($M_1 \neq M_2$) называется множество точек прямой (M_1M_2):*

$$[M_1M_2] = \{M_1\,, M_2\} \cup M \in \mathbf{A} \mid \mu(M_1MM_2)\,. \tag{IV.22}$$

Каждая из точек прямой (M_1M_2), лежащая между M_1 и M_2, называется внутренней точкой отрезка, а точки M_1 и M_2 называются концевыми точками (или началом и концом отрезка).

Определение луча. *Лучом $[M_1M_2)$ с началом в точке M_1 и проходящим через точку M_2 называется множество точек прямой (M_1M_2):*

$$[M_1M_2) = \{M \in \mathbf{A}\} \mid \overrightarrow{M_1M} = \mu\overrightarrow{M_1M_2}\,; \quad \{\mu\} = \mathcal{R}_+\}\,. \tag{IV.23}$$

IV.5 Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении

Пусть задан отрезок $[M_1M_2]$, причем $M_1(x^i_1)\,; M_2(x^i_2)$. Требуется найти аффинные координаты точки $M(x^i)$, делящей отрезок $[M_1M_2]$ в отношении λ (т.е., $\lambda : 1$). Обратимся к определению простого отношения трех точек (IV.18), которое и координатной записи имеет вид:

$$x^i - x^i_2 = \lambda(x^i_1 - x^i)\,; \qquad i = \overline{1, n}\,.$$

Разрешая эти соотношения относительно x^i с учетом ($\lambda \neq -1$), получим окончательно решение:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2} \Leftrightarrow x^i = \frac{x^i_1 + \lambda x^i_2}{1+\lambda}\,; \quad (i = \overline{1, n})\,. \tag{IV.24}$$

В частности, при $\lambda = 1$, т.е., *при делении отрезка пополам* $(1 : 1)$, получим аффинное обобщение известной из школы формулы:

$$[M_1M] = [MM_2] \Rightarrow x^i = \frac{x^i_1 + x^i_2}{2}\,, \quad (i = \overline{1, n})\,, \tag{IV.25}$$

согласно которой координаты середины отрезка равны полусумме координат начала и конца отрезка.

IV.6 Инварианты аффинных преобразований

Аффинные инварианты — *это свойства фигур и отношений, не зависящих от выбора аффинного репера.*

Как мы отмечали выше, аффинное преобразование задается упорядоченной парой аффинных реперов $\Re\{O\,; \{\vec{e}_i\}_n\}$ и $\Re'\{O'\,; \{\vec{e'}_k\}_n\}$, причем каждая точка M, имеющая в репере $\Re$ координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, переходит в точку $M' = f(M)$, имеющую в новом репере $\Re$ те же координаты $\{x^i\}$: $M'(x^i)$. В то же время аффинное преобразование порождает автоморфизм пространства переносов V, задаваемый упорядоченной парой базисов $\{\vec{e}_i\}_n$ и $\{\vec{e'}_k\}_n$: $f\, : \{\vec{e}_i\}_n \longrightarrow \{\vec{e'}_k\}_n$. При этом автоморфизме вектор $\vec{x}$, имеющий в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$ координаты $\{x^i\}$, переходит в вектор $\vec{x}\,'$, имеющий в базисе $\{\vec{e'}_k\}_n$ те же координаты $\{x^i\}$. Отсюда следует, что *при аффинных преобразованиях коллинеарные векторы в пространстве переносов переводятся в коллинеарные, а компланарные - в компланарные.*

Теорема TIV.4. *При аффинных преобразованиях прямая переходит в прямую.*

Теорема TIV.5. *При аффинных преобразованиях пара параллельных прямых переходит в пару параллельных прямых.*

Теорема TIV.6. *При аффинных преобразованиях пара пересекающихся прямых переходит в пару пересекающихся прямых.*

Теорема TIV.7. *При аффинных преобразованиях сохраняется простое отношение трех точек.*

Теорема TIV.8. *При аффинных преобразованиях отрезок переходит в отрезок, а луч - в луч.*

Теорема TIV.9. *При аффинных преобразованиях выпуклый плоский угол переходит в выпуклый плоский угол, а невыпуклый угол - в невыпуклый.*

IV.7 Многомерные плоскости в аффинных пространствах

Определение k - мерной плоскости

Плоскости в аффинном пространстве определяются аналогично прямой, $d(M_0, \vec{q})$, *проходящей через точку* M_0 *в направлении* $\vec{q}$ (см. [2]). Пусть $V_K \subset V_n$ - какое - либо k - мерное подпространство векторного пространства V_n - пространства переносов аффинного пространства $\mathbf{A}_n$, $(0 < k <= n-1)$, а $M_0 \in \mathbf{A}_n$ - какая - либо точка аффинного пространства $\mathbf{A}_n$.

Определение OIV.12. *k - мерной плоскостью $\Pi_k(M_0; V_k)$ в $\mathbf{A}_n$, проходящей через точку M_0 в направлении V_k, называется множество всех точек M аффинного пространства $\mathbf{A}_n$, таких что $\overrightarrow{M_0M} \in V_k$, т.е.,*

$$\Pi_k(M_0; V_k) = \left\{ M \,| M \in \mathbf{A}_n, \, \overrightarrow{M_0M} \in V_k \right\}. \tag{IV.26}$$

Векторное подпространство V_k называется направляющим пространством плоскости, а точка M_0 - опорной точкой плоскости.

Теорема TIV.10. *k - мерная плоскость сама является аффинным пространством.*

Пространством переносов этой плоскости является ее направляющее пространство V_k, так что плоскость $\Pi_k(M_0; V_k)$ является аффинным пространством $\mathbf{A}_k$ размерности k, причем V_k является ее пространством переносов.

Параметрические уравнения k - мерной плоскости

Зададим в $\mathbf{A}_n$ какой-либо репер $\Re\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Рассмотрим плоскость $\Pi_k(M_0; V_k) \subset \mathbf{A}_n$ и пусть $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ - базис направляющего подпространства V_k.

Согласно определению (IV.26)

$$M \in \Pi_k(M_0; V_k) \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in V_k,$$

то есть:

$$M \in \Pi_k(M_0; V_k) \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda^\alpha \vec{q}_\alpha \,. \tag{IV.27}$$

Соотношение (IV.27) будем называть *векторным уравнением k - мерной плоскости, числа* $\lambda^\alpha \in \mathcal{R}$; $(\alpha = \overline{1,k})$ - *параметрами, а базисные векторы направляющего пространства плоскости,* $\vec{q}_\alpha$ - *направляющими векторами плоскости.*

В дальнейшем будем обозначать плоскость, проходящую через точку M_0 в направлении V_k с заданным базисом $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ направляющего пространства как $\Pi_k(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots, \vec{q}_k)$. Таким образом, можно дать еще одно определение k-мерной плоскости:

$$\Pi_k(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots, \vec{q}_k) = \left\{ M \in \mathbf{A}_n | \overrightarrow{M_0M} = \lambda^\alpha \vec{q}_\alpha \right\},$$

$$\left\{\lambda^1, \dots, \lambda^k\right\} \rightrightarrows \mathcal{R}^k. \tag{IV.28}$$

Важно подчеркнуть, что в этом определении плоскость есть множество *всех* точек M, таких что ..., и что параметры $\lambda^\alpha \in \mathcal{R}$; $(\alpha = \overline{1,k})$ *независимо* пробегают *все* множество действительных чисел. Конкретному набору параметров соответствует одна точка плоскости.

Пусть x^i - координаты точки M, x^i_0 - координаты точки M_0 в репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, а q^i_α - координаты векторов $\vec{q}_\alpha$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, т.е.:

$$\vec{q}_\alpha = q^i_\alpha \vec{e}_i \,.$$

Подставляя указанные координаты в векторное уравнение плоскости (IV.28), получим *параметрические уравнения k - мерной плоскости*:

$$x^i = x^i_0 + \lambda^\alpha q^i_\alpha, \qquad (i = \overline{1,n}; \quad \alpha = \overline{1,k}). \tag{IV.29}$$

Это - система n уравнений относительно n координат точки плоскости M, которые однозначно определяются заданием значений k параметров.

IV.8 Группа аффинных преобразований

Теорема о группе аффинных преобразований

Рассмотрим теперь множество всех аффинных преобразований:

$$f\ : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}_n.$$

Это множество может быть задано множеством упорядоченных пар $(\Re, \Re')$ аффинных реперов $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\Re\{O'; \vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}$, или формулами преобразования, связывающими координаты образа (x^i) и прообраза (x'^i) произвольной точки по отношению к одному заданному реперу (см., например, [2]):

$$x'^{\,i} = C'^{\,i}_k x^k + x'^{\,i}_{\,0}\,, \tag{IV.30}$$

где $C'^{\,i}_k$ - матрица, обратная к матрице перехода от старого базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ пространства переноса V_n к новому, $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$, - $C^k_{\prime i}$:

$$\vec{e'}_k = C^i_{\prime k}\vec{e}_i\,, \longrightarrow \vec{e}\,' = \vec{e}C; \qquad C^i_{\prime j} C'^{\,j}_k = \delta^i_k, \tag{IV.31}$$

которая по определению является невырожденной матрицей:

$$\det \|C\| \neq 0. \tag{IV.32}$$

Элементом α множества всех аффинных преобразований $\mathcal{A}$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) является *конкретное* аффинное преобразование (IV.30). Каждое такое преобразование полностью определяется конкретными числами, а). элементами матрицы перехода $C^i_{\prime k}$ $(i, k = \overline{1,n})$; б). координатами *вектора параллельного переноса* $\vec{a}(x^i_0)$. Эти $n^2 + n = n(n+1)$ чисел совершенно произвольны и не связаны между собой никакими условиями. Точнее говоря, имеется лишь одно исключающее условие (IV.32), но оно не устанавливает никакой зависимости между элементами перехода. Поэтому можно говорить, что конкретное аффинное преобразование $\alpha \in \mathcal{A}$ определяется $n(n+1)$ *параметрами*, представляемыми парой $(C'^{\,i}_k, x^J_0)$.

Имеет место теорема:

Теорема TIV.11. *Все множество аффинных преобразований $\mathcal{A}$ вида IV.30 образует группу преобразований.*

Согласно вышесказанному порядок группы аффинных преобразований равен $n(n+1)$, поэтому группу аффинных преобразований, $\mathcal{A}_n$, будем называть $n(n+1)$- *параметрической группой аффинных преобразований и обозначать ее* $\mathcal{A}_{n;n(n+1)}$.

IV.9 Аффинные задачи

Пример ПIV.1. *В качестве примера решения аффинной задачи докажем следующую теорему:*

Теорема TIV.12. *Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Решение

Эту известную теорему мы можем доказывать с помощью произвольного выбора аффинного репера, так как предметом теоремы является выяснение наличия пересечения двух прямых и определение простого отношения трех точек $\mu(BOD)$. И то и другое являются аффинными инвариантами.

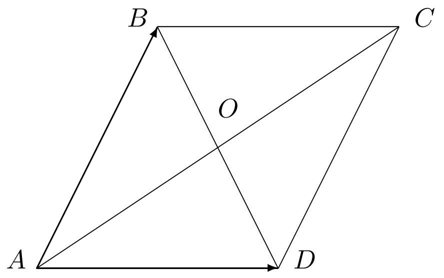


Рис.IV.10. *К доказательству теоремы о диагоналях параллелограмма*

Введем аффинный репер $\Re\{A\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AB}\}$. В этом репере вершины $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(0,0)\,;\;B(0,1)\,;\;C(1,1)\,;\;D(1,0)\,.$$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки, для определения диагоналей (AC) и (BD).

$$(AC)\,:\quad \frac{x}{1}=\frac{y}{1}\,;\qquad (BD)\,:\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & y \\ x & = & 1-y \end{array}\right. \Rightarrow \exists\, O=(AC)\cap(BD)\mid O\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$

Пример ПIV.2. *Докажем теперь обратную теорему:*

Теорема TIV.13. *(Обратная). Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.*

Дано:

$$ABCD\,;\,\exists O=[AC]\cap[BD]\mid$$

$$\overrightarrow{AO}=1/2\overrightarrow{AC}\,;$$

$$\overrightarrow{BO}=1/2\overrightarrow{BD}\,.$$

Доказать, что $ABCD$ - параллелограмм.

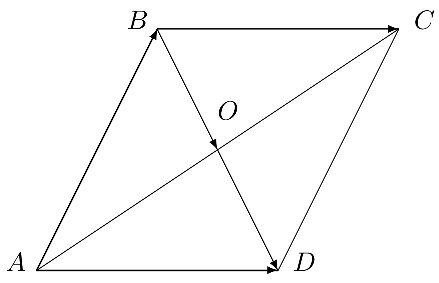


Рис.IV.11. *К доказательству обратной теоремы о параллелограмме*

Решение

$$\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow 1/2\overrightarrow{BD}+1/2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\,; \tag{IV.33}$$

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow 1/2\overrightarrow{AC}+1/2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\,. \tag{IV.34}$$

$$(IV.33)\,,(IV.34)\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\,,$$

и т.д.

Пример ПIV.3. *Теорема о медианах треугольника*

Определение OIV.13. *Медианой треугольника, проведенной из вершины на противолежащую сторону, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.*

Очевидно, что при аффинных преобразованиях медиана треугольника переходит в медиану его образа.

Теорема TIV.14. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 1 : 2.*

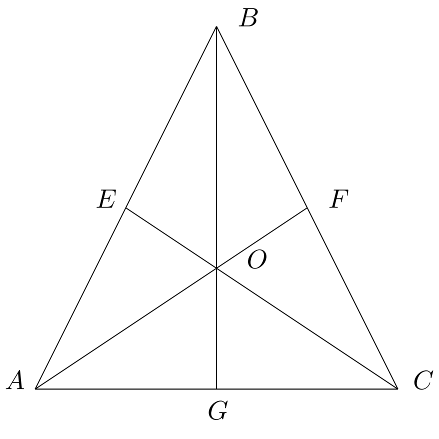


Рис.IV.12. *К теореме о медианах треугольника*

Решение

Независимость вывода этой теоремы от выбора аффинного репера обеспечивается [TIV.6], [TIV.7].

Итак, дано:

$$\overrightarrow{AE}=1/2\overrightarrow{AB}\,;$$
$$\overrightarrow{BF}=1/2\overrightarrow{BC}\,.$$
$$\overrightarrow{AG}=1/2\overrightarrow{AC}\,.$$

Доказать, что $\exists O=[AF]\cap[BG]=[AF]\cap[CE]$ $|\ \overrightarrow{OF}=1/2\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OE}=1/2\overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{OG}=1/2\overrightarrow{BO}$.
Введем аффинный репер: $\Re\{A;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\}$. Координаты вершин A,B,C в этом репере: $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$.

Координаты точек E,F,G находятся по формулам (IV.24) или (IV.25) как координаты точек, делящих отрезок в данном отношении: $E(0,1/2)$, $F(1/2,1/2)$, $G(1/2,0)$.

Уравнения медиан:

$$(AF)\ :\quad \frac{x}{1/2}=\frac{y}{1/2}\Rightarrow x-y=0\,; \tag{IV.35}$$

$$(BG): \quad \frac{x}{1/2} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow 2x + y = 1\,; \tag{IV.36}$$

$$(CE): \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1/2} \Rightarrow x + 2y = 1\,. \tag{IV.37}$$

Выпишем основную и расширенную матрицы системы (IV.35) — (IV.36) и проведем эквивалентные преобразования:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

откуда видно, что ранги основной и расширенной матриц совпадают и равны 2. Из теории систем линейных алгебраических уравнений сразу следует, что существует единственное решение системы (IV.35) — (IV.37), соответствующее искомой точке O, в которой пересекаются три медианы. Решая любые два уравнения из системы (IV.35) — (IV.37), найдем: $O(1/3\,;1/3)$. Тогда $\overrightarrow{OA} = (1/3\,;1/3)$, но так как $\overrightarrow{AF} = (1/2\,;1/2)$, то отсюда сразу получим

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AO} = (1/6\,;1/6)\,.$$

Таким образом:

$$\overrightarrow{OF} = 1/2\overrightarrow{AO} \Rightarrow \lambda(AOF) = 2:1\,.$$

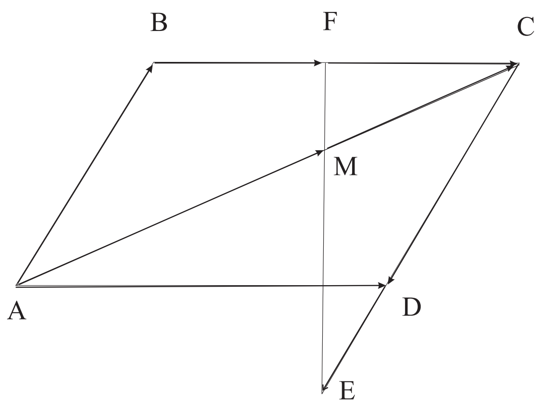


Рис.IV.13. *Нахождение простого отношения трех точек (AC, M)*

Пример ПIV.4. *Дан параллелограмм $ABCD$ и две точки, E и F на его сторонах, причем известно, что $(CE, D) = 2$, $(BF, C) = -3$. Найти отношение, в котором прямая (EF) делит диагональ (AC).*

<u>Решение</u>

Таким образом, раскрывая запись простого отношения

$$(AB, C) = \lambda \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$$

из условий задачи находим:

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DE}; \qquad \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{CF}.$$

Поскольку задача аффинно-инвариантна, введем репер, ассоциированный с вершинами параллелограмма Рис.IV.13:

$$\Re\{A, D, D\} \Longrightarrow A(0,0); D(0,1); D(1,0), C(1,1).$$

Учитывая, что точки E и F лежат, соответственно, на прямых $(BC): y = 1$ и $(CD): x = 1$, положим координаты этих точек равными:

$$E(1, y); \qquad F(x, 1).$$

Тогда получим из простых соотношений уравнения:

$$(1,0) = -3(x-1, 0) \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \Longrightarrow F\left(\frac{2}{3}, 1\right);$$

$$(0,-1) = 2(0, y) \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} \Longrightarrow E\left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

Построим прямые (AC) и (EF) как прямые, проходящие через пару точек:

$$(AC): \quad \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} \Longrightarrow x = y;$$

$$(EF): \quad \frac{x-1}{2/3-1} = \frac{y+1/2}{1+1/2} \Longrightarrow 9x + 2y - 8 = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, найдем координаты точки пересечения $M\left(\frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right)$. Следовательно, векторы имеют координаты:

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right); \quad \overrightarrow{MC} = \left(\frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right).$$

Таким образом:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{8}{3}\overrightarrow{MC} \Longrightarrow (AC, M) = \frac{8}{3}.$$

IV.10 Задачи о принадлежности двух точек одной фигуре

Принадлежность двух точек одной полуплоскости

Пусть на плоскости Π в некотором аффинном репере $\Re$ задана прямая d своим общим уравнением:

$$d: \quad Ax + By + C = 0\,, \tag{IV.38}$$

и пусть указана одна из полуплоскостей Π_1 своей внутренней точкой $A(x_A\,, y_A)$. Пусть также задана своими аффинными координатами в репере $\Re$ другая точка $B(x_B\,, y_B)$, не лежащая на прямой d. *Требуется определить, какой полуплоскости принадлежит точка B?*
Построим прямую (AB):

$$(AB): \quad \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \mu\,. \tag{IV.39}$$

Как следует из смысла канонического уравнения прямой (раздел II), (IV.39) представляет координатную запись векторного уравнения $\overrightarrow{AM} = \mu\overrightarrow{AB}$, причем простое отношение трех точек A, M, B (λ) выражается через μ с помощью соотношения (IV.19): $\lambda = \mu/(1-\mu)$. Допустим, что прямые (AB) и d пересекаются и $D = d \cap (AB)$.

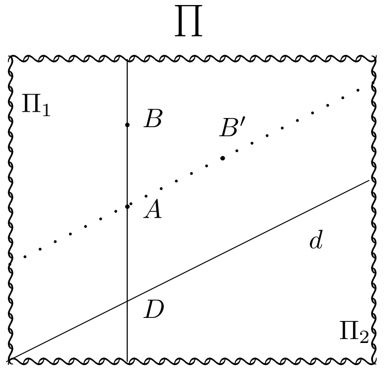


Рис.IV.14. *Принадлежность двух точек одной полуплоскости*

Из (IV.38), (IV.39) найдем значение μ_D, соответствующее точке D:

$$\mu_D = -\frac{Ax_A + By_A + C}{A(x_B - x_A) + B(y_B - y_A)}\,. \tag{IV.40}$$

Из (IV.40) следует, что прямые (AB) и d параллельны, если:

$$A(x_B - x_A) + B(y_B - y_A) = 0\,, \tag{IV.41}$$

(при этом $\mu = \pm\infty$). В этом случае точки A и B заведомо лежат в одной полуплоскости Π_1. Предположим, что прямые (AB) и d не параллельны, т.е., (IV.41) не выполняется. Тогда с помощью (IV.40) вычислим простое отношение трех точек A, D, B $(\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{DB})$:

$$\xi_{A/B} \stackrel{def}{=} \lambda_D = -\frac{Ax_A + By_A + C}{Ax_B + By_B + C}\,. \tag{IV.42}$$

Очевидно, что если точка D является внутренней точкой отрезка $[AB]$, то точки A и B принадлежат разным полуплоскостям Π_1 и Π_2. Этому случаю отвечает $\lambda_D > 0$. Если же D - внешняя точка отрезка $[AB]$, то точки A и B принадлежат одной полуплоскости (в данном случае по условию Π_1). Этому случаю соответствует $\lambda < 0$. Заметим, что вследствие аффинной инвариантности простого отношения трех точек определение (IV.42) также инвариантно. Заметим также, что вследствие (IV.38) ни числитель, ни знаменатель дроби (IV.42) не обращается в нуль, так как ни одна из точек A и B не лежит на прямой d. Итог можно оформить в виде теоремы:

Теорема TIV.15. *Пусть плоскость Π делится прямой d, заданной в произвольном аффинном репере $\Re$ общим уравнением (IV.38), на части Π_1' и Π_2' ($\Pi_a = \Pi_a' \cup d$ - соответствующие полуплоскости) и пусть $A(x_A\,, y_A)$ и $B(x_B\,, y_B)$ - произвольные точки плоскости Π, не лежащие на прямой d. Определим для произвольной точки плоскости $M_*(x_*\,, y_*)$ число $\delta_{M_*} = Ax_* + By_* + C$ и для пары точек A и B -*

$$\xi_{A/B} = \frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{Ax_A + By_B + C}{Ax_B + By_B + C}\,. \tag{IV.43}$$

Тогда необходимым и достаточным условием принадлежности точек A и B одной полуплоскости является:

$$\xi_{A/B} > 0 \Leftrightarrow A\,, B \in \Pi_1\,, \tag{IV.44}$$

а разным полуплоскостям -

$$\xi_{A/B} < 0 \Leftrightarrow (A \in \Pi_1\,,\; B \in \Pi_2)\,. \tag{IV.45}$$

Число $\xi_{A/B}$ является инвариантом аффинных преобразований для любой пары точек.

Определение OIV.14. *Говорят, что две точки лежат по одну сторону от прямой, если они лежат в одной полуплоскости, определяемой этой прямой. Если же две точки лежат в разных полуплоскостях, говорят, что они лежат по разные стороны от прямой.*

Принадлежность двух точек одному углу

Пусть на плоскости Π двумя лучами $[CA)$ и $[CB)$ с общей вершиной C, не лежащими на одной прямой, заданы два угла Γ_1 и Γ_2, из которых Γ_1 - выпуклый, а Γ_2 - невыпуклый. Пусть далее в некотором аффинном репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на плоскости Π заданы координаты точек: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$.

Как определить, какому из углов, - Γ_1 или Γ_2, принадлежит точка $P(x_P, y_P)$?

Поскольку точки $A\,, B\,, C$ не лежат на одной прямой, они могут быть использованы для построения нового аффинного репера $\Re'$ на плоскости Π : $\Re'\{C\,, A\,, B\} \equiv \Re'\{C\,; \overrightarrow{CA}\,, \overrightarrow{CB}\}$. Разложим вектор $\overrightarrow{CP}$ по векторам базиса пространства переносов V_2 $\{\overrightarrow{CA}\,, \overrightarrow{CB}\}$:

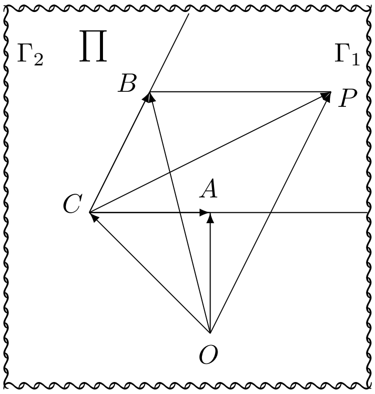


Рис.IV.15. *Принадлежность двух точек одному углу*

$$\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB}\,. \tag{IV.46}$$

Упорядоченная пара чисел $(\lambda\,,\mu)$ является координатами точки P в репере $\Re'$. Как мы видели выше, условием принадлежности точки P выпуклому углу в репере $\Re'$, построенном на его сторонах, является:

$$P(\lambda\,,\mu) \mid \lambda > 0\,,\mu > 0\,.$$

Если $\lambda = 0\,,\mu > 0$ или $\lambda > 0\,,\mu = 0$, - точка P лежит на одной из сторон угла; значение $\lambda = 0$, $\mu = 0$ соответствует вершине угла - точке C. Любые другие случаи означают, что точка P принадлежит невыпуклому углу Γ_2. Используя правило треугольника ($\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$) и определение аффинных координат точек $A\,,B\,,C$, перепишем (IV.46) относительно репера $\Re$:

$$x_P - x_C = \lambda(x_A - x_C) + \mu(x_B - x_C)\,;$$

$$y_P - y_C = \lambda(y_A - y_C) + \mu(y_B - y_C)\,. \tag{IV.47}$$

Разрешая систему (IV.47) относительно λ и μ по правилу Крамера, найдем :

$$\lambda = \frac{\Delta(P,B\,;C)}{\Delta(A,B\,;C)}\,; \qquad \mu = \frac{\Delta(A,P\,;C)}{\Delta(A,B\,;C)}\,, \tag{IV.48}$$

где введено обозначение:

$$\Delta(A,B\,;C) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} x_A - x_C & x_B - x_C \\ y_A - y_C & y_B - y_C \end{vmatrix}\,. \tag{IV.49}$$

Числа $\Delta(A,B\,;C)$ обладают следующими свойствами:

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.1. *Числа $\Delta(A,B\,;C)$ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда 3 точки $A\,,B\,,C$ лежат на одной прямой (сюда относится и случай, когда 2 точки совпадают).*

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.2. *Числа $\Delta(A,B\,;C)$ изменяют знак при перестановке первых двух точек:*

$$\Delta(A,B\,;C) = -\Delta(B,A\,;C)\,. \tag{IV.50}$$

Вычисляя выражения (IV.48) и определяя знаки λ и μ, получим решение поставленной задачи, инвариантное по отношению к аффинным преобразованиям.

Указанную выше задачу можно решить и другим способом.

Выпуклый угол Γ_1 можно представить как пересечение двух полуплоскостей: $\Gamma_1 = \Pi_A \cap \Pi_B$, первая из которых, Π_A определяется прямой (CB) и содержит точку A: $\Pi_A = \Pi_1((CB),A)$, а вторая, Π_B, определяется прямой (CA) и содержит точку B: $\Pi_B = \Pi_2((CA),B)$. Уравнения прямых (CA) и (CB) согласно (IV.49) имеют вид:

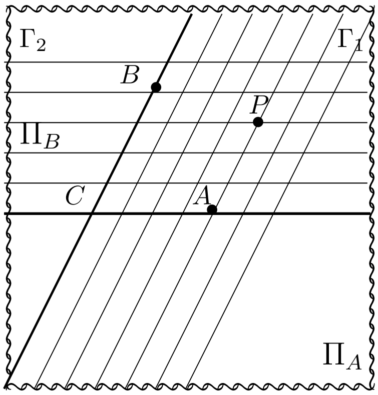


Рис.IV.16. *Принадлежность двух точек одному углу. 2-й подход.*

$$(CA)\ :\Delta(M,A\,;C)=\begin{vmatrix} x-x_C & x_A-x_C\\ y-y_C & y_A-y_C\end{vmatrix}=0\,;$$

$$(CB)\ :\Delta(M,B\,;C)=\begin{vmatrix} x-x_C & x_B-x_C\\ y-y_C & y_B-y_C\end{vmatrix}=0\,.$$

Соответствующие общие уравнения прямых имеют коэффициенты:

$$(CA):\quad A=y_A-y_C\,;\ B=-(x_A-x_C)\,;$$

$$C=-x_C(y_A-y_C)+y_C(x_A-x_C)\,;$$

$$(CB):\quad A'=y_B-y_C\,;\ B'=-(x_B-x_C)\,;$$

$$C'=-x_C(y_B-y_C)+y_C(x_B-x_C)\,.$$

Составляя в соответствие с [TIV.15] инварианты $\xi_{P/A}\,,\xi_{P/B}$, получим:

$$\xi_{P/A}=\lambda\,,\qquad \xi_{P/B}=\mu\,,\tag{IV.51}$$

и, таким образом, получим критерий принадлежности точки P выпуклому углу Γ_1.

Теорема TIV.16. *Для того, чтобы точка P принадлежала выпуклому углу Γ_1, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли условиям:*

$$P\in\Gamma_1\quad\Leftrightarrow\quad \xi_{P/A}>0\,;\quad \xi_{P/B}>0\,.\tag{IV.52}$$

Примеры

Пример ПIV.5. *Выяснить, лежат ли точки $A(1,1)$ и $B(-3,4)$ по одну сторону от прямой d : $x-y+1=0$.*

Решение

Найдем: $\delta_A=1$; $\delta_B=-6$; $\xi_{A/B}=-1/6<0$.
Точки A и B лежат по разные стороны от прямой d.

Пример ПIV.6. *Выяснить, лежат ли точка $A(1,1)$ и начало аффинного репера по одну сторону от указанной прямой.*

Решение

Началом аффинного репера является точка $O(0,0)$, для которой найдем: $\delta_O=C=1$. Таким образом, $\xi_{O/A}=1>0$.
Начало аффинного репера и точка A лежат по одну сторону от прямой d.

Пример ПIV.7. *На плоскости заданы два луча $[CA)$ и $[CB)$ с общей вершиной C, причем $A(2,2)$, $B(3,4)$, $C(1,-1)$. Определить, какому из углов принадлежит точка $P(5,6)$.*

Решение

Итак, согласно (IV.48), (IV.49) найдем:

$$\Delta(A,B\,;C)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-1\,;\quad \Delta(P,B\,;C)=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 7 & 5\end{vmatrix}=6\,;$$

$$\Delta(A,P\,;C)=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-5\,.$$

Таким образом: $\lambda=6:(-1)=-6$, $\mu=(-5):(-1)=+5$, т.е., точка P принадлежит невыпуклому углу Γ_2.

Пример ПIV.8. *Дан параллелограмм $ABCD$ аффинными координатами своих вершин*

$$A(1,2);\ B(5,5);\ D(7,10).$$

Определить, является ли точка $P(4,5)$ внутренней точкой параллелограмма $ABCD$.

Решение

Найдем векторы, соответствующие сторонам параллелограмма:

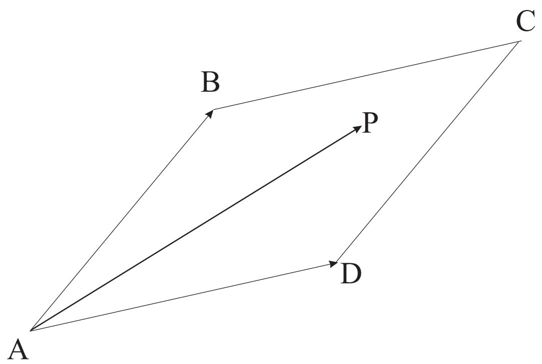


Рис.IV.17. *Определение положения точки P по отношению к параллелограмму $ABCD$*

$$\overrightarrow{AD}=(6,8);\qquad \overrightarrow{AB}=(4,3)$$

а также вектор

$$\overrightarrow{AP}=(3,3)$$

и разложим этот вектор по базису $\{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\}$:

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AB}\Longrightarrow(3,3)=\lambda(6,8)+\mu(4,3).$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, получим систему уравнений относительно λ,μ:

$$\left.\begin{array}{l}3=6\lambda+4\mu\\ 3=8\lambda+3\mu\end{array}\right\},$$

решая которую, получим:

$$\lambda=\frac{3}{14};\ \mu=\frac{6}{14}.$$

Таким образом

$$0\le\lambda\le1,\ 0\le\mu\le1,\Longrightarrow$$

точка P является внутренней точкой параллелограмма $ABCD$.

Пример ПIV.9. *Дан треугольник ABC аффинными координатами своих вершин*

$$A(1,2);\ B(5,5);\ C(7,10).$$

- (координаты вершин совпадают с координатами вершин параллелограмма из предыдущей задачи). Определить, является ли точка $P(4,5)$ внутренней точкой треугольника $ABCD$.

Решение

Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$\overrightarrow{AC} = (6, 8); \qquad \overrightarrow{AB} = (4, 3) \qquad \overrightarrow{AP} = (3, 3)$$

и разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AB} \Longrightarrow (3, 3) = \lambda(6, 8) + \mu(4, 3) \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{3}{14}; \ \mu = \frac{6}{14}.$$

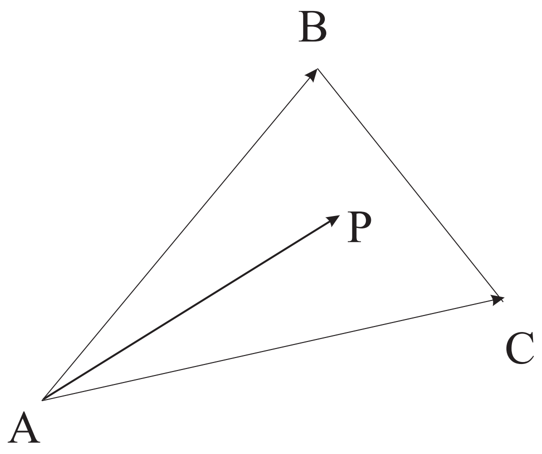


Рис.IV.18. *Определение положения точки P по отношению к треугольнику ABC*

Уравнение прямой (BD) в репере $\Re\{A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$ имеет вид:

$$(BD): \ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} \Longrightarrow x + y - 1 = 0.$$

Находим:

$$\delta_P = \frac{3}{14} \cdot 1 + \frac{6}{14} \cdot (-1) - 1$$

$$= -\frac{17}{14} \leq 0; \delta_A = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 - 1 = -1 \leq 0 \Longrightarrow$$

точки A и P находятся по одну сторону от прямой (AB), что с учетом предыдущего примера дает результат: точка P является внутренней точкой треугольника ABC.

Глава V

Евклидовы пространства

V.1 Билинейные и квадратичные формы

Рассмотрим отображение $B : V \times V \longrightarrow \mathcal{R}$, где $V \times V$ — прямое произведение V_n самого на себя.

Определение OV.1. *Числовая функция $B(\vec{x}, \vec{y})$ называется билинейной формой, если для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_n$ и любого $\lambda \in \mathcal{R}$ выполнено:*
(1) $B(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{z}, \vec{y})$;
(2) $B(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda B(\vec{x}, \vec{y})$;
(3) $B(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{x}, \vec{z})$;
(4) $B(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda B(\vec{x}, \vec{y})$,
т.е. числовая функция линейна как по первому, так и по второму аргументу.

Матрица билинейной формы.
Обозначим $B(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \beta_{ik}$, тогда

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik} v^i y^k, \tag{V.1}$$

где β_{ik} называются *коэффициентами билинейной формы*. Из них можно построить матрицу (первый индекс номер строки, второй — номер столбца)

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & ... & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & ... & \beta_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & ... & \beta_{nn} \end{pmatrix}, \tag{V.2}$$

которая носит название *матрицы билинейной формы относительно данного базиса.*
Преобразование матрицы билинейной формы.
Пусть $\vec{e}_{'k} = \sum\limits_{i=1}^{n} C^i_{'k} \vec{e}_i$ — векторы нового базиса. Тогда:

$$B' = C^T B C. \tag{V.3}$$

Ранг матрицы билинейной формы есть инвариант преобразования базисов.

В силу того, что $\det C^T = \det C$ (первое свойство определителей), имеем

$$\det B' = (\det C)^2 \det B, \tag{V.4}$$

Знак детерминанта матрицы билинейной формы есть инвариант преобразования базисов.

Симметрические и антисимметрические билинейные формы.

Определение OV.2. *Матрица B называется называется симметрической, если при транспонировании она не меняется, т.е.* $B^T = B$.

Определение OV.3. *Матрица B называется называется антисимметрической (кососимметрической), если при транспонировании меняет знак на противоположный, т.е.* $B^T = -B$.

Если элементы матрицы B обозначить через β_{ik}, то условие симметричности означает следующее равенство между элементами матрицы:

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} \quad (i, k = \overline{1, n}). \tag{V.5}$$

а условие антисимметричности означает, что

$$\beta_{ik} = -\beta_{ki} \quad (i, k = \overline{1, n}). \tag{V.6}$$

Условия (V.6) при $i = k$ дают, что $\beta_{ii} = -\beta_{ii}$ и все элементы по главной диагонали матрицы нулевые, а при $i \neq k$ элементы совпадают по модулю, но отличаются знаком.

Определение OV.4. *Билинейная форма* $B(\vec{x}, \vec{y})$ *называется симметричной, если для любых* $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ *выполнено* $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$.

Билинейная форма с симметрической матрицей есть симметричная билинейная форма.

Определение OV.5. *Билинейная форма* $B(\vec{x}, \vec{y})$ *называется антисимметричной, если для любых* $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ *справедливо равенство:*$B(\vec{x}, \vec{y}) = -B(\vec{y}, \vec{x})$.

Билинейная форма с антисимметрической матрицей есть антисимметричная билинейная форма.

Любая билинейная форма может быть всегда представлена как сумма симметричной и антисимметричной билинейных форм.

$$B(\vec{x}, \vec{y})) = B_1(\vec{x}, \vec{y}) + B_2(\vec{x}, \vec{y}). \tag{V.7}$$

Определение OV.6. *Квадратичной формой* $B(\vec{x}, \vec{x})$ *называется числовая функция, полученная из билинейной формы* $B(\vec{x}, \vec{y})$ *путем замены аргумента* y *на аргумент* x.

Для установления вида квадратичной формы воспользуемся соотношениями (V.7) и заменим в них аргумент y на аргумент x. В этом случае $B_2(\vec{x}, \vec{y}) \equiv 0$ и
$B(\vec{x}, \vec{x}) = B_1(\vec{x}, \vec{x})$. Итак: Всякая квадратичная форма, построенная на основе билинейной формы $B(\vec{x}, \vec{y})$, совпадает с квадратичной формой, построенной на основе симметричной части $B_1(\vec{x}, \vec{y})$ общей билинейной формы $B(\vec{x}, \vec{y})$.

Таким образом, матрица всякой квадратичной формы есть симметрическая матрица:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

а сама квадратичная форма в некотором базисе имеет вид

$$B(\vec{x},\vec{x}) = \beta_{11}(x^1)^2 + 2\beta_{12}x^1x^2 + \ldots + 2\beta_{1n}x^1x^n + \beta_{22}(x^2)^2 + 2\beta_{23}x^2x^3 + \\ + \ldots + 2\beta_{n-1n}x^{n-1}x^n + \beta_{nn}(x^n)^2. \tag{V.8}$$

Поскольку матрица квадратичной формы совпадает с матрицей симметричной билинейной формы, то:

1. ранг матрицы квадратичной формы (называемый просто рангом квадратичной формы) есть инвариант преобразования базисов,

2. знак детерминанта матрицы квадратичной формы сохраняется при преобразованиях базисов,

3. при переходе от одного базиса к другому закон преобразования матрицы квадратичной формы имеет вид $B' = C^T BC$.

Если ранг квадратичной формы полный (ранг $B = n$), то квадратичная форма называется *невырожденной.*

Определение OV.7. *Базис, в котором квадратичная форма представляется в виде суммы квадратов координат, умноженных на некоторые коэффициенты, называется каноническим.*

Матрица квадратичной формы в каноническом базисе имеет диагональный вид.

Теорема TV.1. *В пространстве V_n всегда существует канонический базис $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$ в котором квадратичноя форма примет вид*

$$B(\vec{x},\vec{x}) = (y^{'1})^2 + \ldots + (y^{'s})^2 - (y^{'s+1})^2 - \ldots - (y^{'r})^2, \tag{V.9}$$

который называется каноническим, при этом число s— положительным индексом инерции, $(r - s)$ — отрицательным индексом инерции, разность $s - (r - s)$ при полном ранге $r = n$ — сигнатурой квадратичной формы.

Определение OV.8. *Квадратичная форма $B(\vec{x},\vec{x})$ называется положительно определенной, если для любого $x \neq 0$ $B(\vec{x},\vec{x}) > 0$.*

Теорема TV.2. *Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы положительный индекс инерции был равен n.*

Симметричная билинейная форма, соответствующая положительно определенной квадратичной форме в каноническом базисе имеет вид

$$B(\vec{x},\vec{y}) = x^{'1}y^{'1} + x^{'2}y^{'2} + \ldots + x^{'n}y^{'n}. \tag{V.10}$$

Ее матрица является единичной.

Теорема TV.3. *(Сильвестра). Квадратичная форма $B(\vec{x},\vec{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \beta_{ik}x^ix^k$ положительно определенная тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы B строго положительны:*

$$\beta_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{V.11}$$

V.2 Собственно евклидовы и псевдоевклидовы пространства

Определение OV.9. *Векторное пространство E_n называется евклидовым векторным пространством, если в в V_n раз и навсегда зафиксирована симметричная невырожденная билинейная форма*

$$g(\vec{x}, \vec{y}),$$

называемая фундаментальной билинейной формой или метрической билинейной формой (или просто метрикой).

Из этого определения следует, что если в некотором базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ $g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} g_{ik} x^i y^k$, то (1) $g_{ik} = g_{ki}$ (симметричность), (2) $\det(g_{ik}) \neq 0$ (невырожденность.)

Метрическую билинейную форму принято называть *скалярным произведением векторов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозначать просто $(\vec{x}\,\vec{y})$, опуская ради простоты букву g - символ метрической билинейной формы.

Зная свойства симметричных билинейных форм, установленные нами ранее, запишем их для скалярного произведения векторов

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad (\vec{x}\,\vec{y}) = (\vec{y}\,\vec{x});\\
&\text{(b)} \qquad \Big((\vec{x} + \vec{z}) \cdot \vec{y}\Big) = (\vec{x}\,\vec{y}) + (\vec{z}\,\vec{y});\\
&\text{(c)} \qquad \Big(\lambda \vec{x} \cdot \vec{y}\Big) = \lambda(\vec{x}\,\vec{y}).
\end{aligned}
\tag{V.12}
$$

В произвольном базисе скалярное произведение $(\vec{x}\,\vec{y})$ подсчитывается согласно определению билинейной формы, следующим образом:

$$(\vec{x}\,\vec{y}) = g_{ik} x^i y^k, \tag{V.13}$$

где $g_{ik} = (\vec{e_i}\,\vec{e_k})$ — скалярные произведения векторов базиса.

Метрической билинейной форме однозначно соответствует невырожденная квадратичная форма

$$(\vec{x}\,\vec{x}) = x^2 = g_{ik} x^i y^k \tag{V.14}$$

называемая квадратом длины вектора $\vec{x}$.

Длина вектора обозначается символом $|\vec{x}|$ и, следовательно, в произвольной аффинной системе координат вычисляется по формуле

$$|\vec{x}| = \sqrt{g_{ik} x^i x^k}. \tag{V.15}$$

Определение OV.10. *Евклидово векторное пространство называется собственно евклидовым векторным пространством и обозначается E_n, если невырожденная квадратичная форма*

$$(\vec{x}\,\vec{x}) = g_{ik} x^i x^k$$

является положительно определенной, т.е.:

$$(\vec{x}\,\vec{x}) \geq 0 \quad (\forall \vec{x} \in E_n),$$

и называется псевдоевклидовым векторным пространством, если невырожденная квадратичная форма не является положительно определенной. В этом случае для векторного пространства принято обозначение E_n^*.

Таким образом, для *собственно евклидовых пространств* к свойствам (V.12)a, b, c) скалярного произведения прибавляется еще одно

$$x^2 = (\vec{x}\,\vec{x}) > 0 \quad (\forall \vec{x} \neq 0) \tag{V.16}$$

и $(\vec{x}\,\vec{x}) = 0$ тогда и только тогда , когда $\vec{x}$ является нуль-вектором.

Для собственно евклидовых пространств всегда существует *канонический базис*, $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$, в котором положительно определенная для собственно евклидовых пространств невырожденная квадратичная форма $\vec{x}^2$ имеет вид

$$\vec{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2. \tag{V.17}$$

Это означает, что в базисе $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ для собственно евклидовых пространств коэффициенты метрической формы

$$g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, \ i = k \\ 0, \ i \neq k \end{cases}$$

и матрица (g_{ik}) имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{V.18}$$

Рассмотрим собственно евклидовы пространства, которые будем называть евклидовыми и дадим определение ортогональных векторов (используемое также в случае псевдоевклидовых пространств).

Определение OV.11. *Векторы $\vec{x}, \vec{y}$ называются ортогональными между собой, если их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{x}\,\vec{y}) = 0$.*

Обратившись к каноническому базису $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ и зная, что коэффициенты метрической билинейной формы есть скалярные произведения векторов базиса, из (V.18) заключаем

$$(\vec{i}_k\,\vec{i}_m) = \delta_{km} = \begin{cases} 1, \ k = m \\ 0, \ k \neq m \end{cases}, \tag{V.19}$$

т.е. векторы канонического базиса взаимно ортогональны друг другу и имеют длины, равные единицы. Каждый такой базис называется *ортонормированным* (или *ортореперoм*). Итак, согласно (V.18) *в евклидовом пространстве E_n всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица метрической формы совпадает с единичной матрицей.*

В ортонормированном базисе все формулы, связанные с вычислением скалярного произведения (метрических величин), упрощаются, и в этом смысле выбор ортонормированного базиса является предпочтительным. Например, скалярное произведение векторов и длина вектора в ортонормированном базисе имеют:

$$(a) \quad (\vec{x}\,\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} x^k y^k; \quad (b) \quad |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2}. \tag{V.20}$$

Определение OV.12. *Углом θ между ненулевыми векторами $\vec{x}, \vec{y}$ мы будем называть угол (в пределах от 0 до π), косинус которого равен $\dfrac{(\vec{x}\,\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$.*

В аффинной системе координат он подсчитывается по формуле

$$\cos\theta = \frac{g_{ik} x^i y^k}{\sqrt{g_{lm} x^l x^m}\sqrt{g_{jh} y^j y^h}}. \tag{V.21}$$

В прямоугольной системе координат (V.21) принимает более простой вид

$$\cos\theta = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x^k y^k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k)^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(y^k)^2}}. \tag{V.22}$$

Ортогональные матрицы

Поставим вопрос о переходе в E_n от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат. Предварительно дадим определение ортогональной матрицы.

Определение OV.13. *Матрица $A = (\alpha^i_k)$ называется ортогональной, если она удовлетворяет условию*

$$A^T A = E, \tag{V.23}$$

которое в подробной записи имеет вид

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha^p_k \alpha^p_m = \delta_{km} = \begin{cases} 1, \; k = m \\ 0, \; k \neq m. \end{cases} \tag{V.24}$$

Из (V.24) заключаем, что у всякой *ортогональной матрицы* сумма произведений элементов столбца на самого себя равна единице, а сумма произведений элементов разных столбцов равна нулю. Это правило легко позволяет отличить ортогональную матрицу от неортогональной. Его можно было бы взять за новое определение ортогональной матрицы, поскольку оно означает выполнение (V.24).

Из (V.23) следует, что $(\det A^T)\cdot(\det A) = \det E$ или $(\det A)^2 = 1$, и, следовательно, если A - ортогональная матрица, то

$$\det A = \pm 1. \tag{V.25}$$

Это означает, что ортогональная матрица обязательно невырожденная, и если (V.23) умножить справа на A^{-1}, то получим эквивалентное (V.23) условие

$$A^T = A^{-1}, \tag{V.26}$$

Условие (V.26) можно было бы взять еще за одно определение ортогональной матрицы.

V.3 Теоремы о приведении квадратичной формы к каноническому виду

Определение OV.14. *Оператор $A(\vec{x})$ называется самосопряженным (симметрическим), если $A(\vec{x}) = A^c(\vec{x})$, т.е. $\Big(A(\vec{x})\cdot\vec{y}\Big) = \Big(\vec{x}\cdot A(\vec{y})\Big)$, $\forall \vec{x},\vec{y} \in E_n$.*

Матрица A самосопряженного оператора в произвольном базисе удовлетворяет условию

$$A = G^{-1}A^T G, \tag{V.27}$$

а в ортонормированном базисе, когда $G = E$, имеем

$$A = A^T \Rightarrow \alpha^i_k = \alpha^k_i. \tag{V.28}$$

У всякого самосопряженного оператора в ортонормированном базисе матрица необходимо симметрическая (отсюда и еще одно название у самосопряженного оператора — симметрический оператор).

Наоборот, пусть в ортонормированном базисе матрица некоторого оператора $A(\vec{x})$ симметрическая, т.е. $\alpha_k^m = \alpha_m^k$, тогда $A(\vec{x})$ — самосопряженный оператор.

Теорема TV.4. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественные числа.*

Теорема TV.5. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой.*

Ортогонализация системы линейно - независимых векторов

Взаимно-однозначное соответствие между симметричными билинейными формами и самосопряженными операторами в E_n позволяет решить один из наиболее важных для физических приложений вопросов о приведении ортогональными преобразованиями к главным осям симметрических матриц.

Предварительно решим задачу о построении ортонормированного базиса для линейной оболочки в E_n, натянутую на систему векторов $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_k}\}$ $(k \le n)$, причем, не ограничивая общности рассуждений, будем считать эти векторы линейно-независимыми (в противном случае из системы векторов выделяем максимальное число линейно-независимых и процесс ортогонализации будем осуществлять только для них).

Рассмотрим вектор $\vec{f_1}$, пронормируем его и обозначим $\vec{g}_1 = \dfrac{\vec{f_1}}{|\vec{f_1}|}$. Рассмотрим далее вектор $\vec{f}'_2 = \alpha_1\vec{g}_1 + \vec{f_2}$ с неизвестным коэффициентом α_1 и выберем его так, чтобы $\vec{f}'_2$ был ортогонален к $\vec{g}_1$, т.е. $(\vec{g_1}\,\vec{f}'_2) = 0$. Последнее равенство означает, что $\alpha_1 \cdot 1 + (\vec{g_1}\,\vec{f_2}) = 0$, откуда следует

$$\alpha_1 = -(\vec{g_1}\,\vec{f_2}).$$

Пронормируем вектор $\vec{f}'_2$ и обозначим $\vec{g}_2 = \dfrac{\vec{f}'_2}{|\vec{f}'_2|}$. Затем строим вектор

$\vec{f}'_3 = \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \vec{f_3}$ с неизвестными коэффициентами β_1, β_2, которые определим из условий ортогональности f'_3 к $\vec{g}_1$ и к $\vec{g}_2$: $(\vec{g_1}\,\vec{f'_3}) = \beta_1 \cdot 1 + (\vec{g_2}\,\vec{f_3}) = 0$, и $(\vec{g_2}\,\vec{f'_3}) = \beta_2 \cdot 1 + (\vec{g_2}\,\vec{f_3}) = 0$, т.е.

$$\beta_1 = -(\vec{g_1}\,\vec{f_3}), \quad \beta_2 = -(\vec{g_2}\,\vec{f_3}).$$

Пронормируем вектор $\vec{f}'_3$ и обозначим $\vec{g}_3 = \dfrac{\vec{f}'_3}{|\vec{f}'_3|}$. Продолжая процесс, мы построим систему единичных взаимно-ортогональных векторов $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k\}$, которую можно взять за базис рассматриваемой оболочки, так как система построенных векторов будет линейно независима.

Если нам необходимо перейти от ортонормированного базиса $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$, относительно которого были заданы векторы $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_k}$, к другому ортонормированному базису в E_n, первыми векторами которого служили бы векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$, то поступаем следующим образом.

Пусть $\vec{g}_1 = \sum\limits_{m=1}^{n} x_1^m \vec{i}_m, \ldots, \vec{g}_k = \sum\limits_{m=1}^{n} x_k^m \vec{i}_m$. Ищем множество всех таких векторов $\vec{x} = \sum\limits_{m=1}^{n} x_1^m \vec{i}_m$, которые были бы ортогональны одновременно к $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$. Для этого строим нормальную систему решений

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{g_1}\,\vec{x}) = \sum\limits_{m=1}^{n} x_1^m \vec{x}^{\,m} = 0 \\ (\vec{g_2}\,\vec{x}) = \sum\limits_{m=1}^{n} x_2^m \vec{x}^{\,m} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\vec{g}\,\vec{x}) = \sum\limits_{m=1}^{n} x_k^m \vec{x}^{\,m} = 0 \end{array}\right\}. \tag{V.29}$$

Тогда совокупность векторов $\vec{x}$ будет образовывать линейную оболочку, натянутую на векторы нормальной фундаментальной системы решений. Поскольку ранг матрицы системы уравнений (V.29) равен k (векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k$ линейно независимы), то имеем $(n-k)$ векторов нормальной фундаментальной системы решений. Для них применим процесс ортогонализации и обозначим полученные единичные взаимно ортогональные векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_{n-k}$. Система векторов $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots \vec{g}_k, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{n-k}\}$ и будет служить новым ортонормированным базисом в E_n. Ортогональная матрица перехода от базиса $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_n\}$ к базису $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots \vec{g}_k, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{n-k}\}$ строится очень просто. Ее столбцами служат матрицы- столбцы из координат векторов $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots \vec{g}_k, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{n-k}\}$.

Теорема о диагональном виде матрицы самосопряженного оператора

Теорема TV.6. *У каждого самосопряженного оператора в E_n существует n единичных взаимноортогональных собственных векторов. Матрица оператора относительно ортонормированного базиса, построенного на указанных собственных векторах оператора, имеет диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}, \tag{V.30}$$

где по диагоналям расположены собственные значения оператора, построенные столько раз, какова их кратность в характеристическом уравнении.

Но заданной в ортонормированном базисе матрице самосопряженного оператора однозначно сопоставляется симметрическая билинейная форма (квадратичная форма), причем матрицы оператора и формы при переходе в другой ортонормированный базис преобразуются по одному и тому же закону. Поэтому теорему (TV.6) можно записать в следующей эквивалентной форме (она - то и играет в приложениях главную роль).

Теорема TV.7. *Любую квадратичную форму $B(\vec{x}, \vec{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x^i x^k$ $(\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$ ортогональными преобразованиями всегда можно привести к следующему каноническому виду:*

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 (y^1)^2 + \ldots + \lambda_1 (y^{r_1})^2 + \ldots + \lambda_s (y^n)^2 \tag{V.31}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — корни характеристического уравнения $\chi(\lambda) = \det(\alpha_{ik} - \lambda \delta_{ik})$, встречающиеся столько раз, какова их кратность.[1]

Евклидовы пространства точек $\mathcal{E}_n$

Определение OV.15. *Аффинное пространство $\mathbf{A}_n$ над евклидовым векторным пространством E_n называется евклидовым пространством точек.*

[1] В данном случае кратность корня λ_1, k_1, равна r_1.

> Таким образом, с одной стороны евклидовы пространства точек являются аффинными пространствами, поэтому все отношения и свойства аффинных пространств автоматически переносятся и на евклидовы. С другой стороны, на пространстве переносов E_n евклидова пространства определено новое тернарное отношение — скалярное произведение векторов, которое генерирует новые отношения и в евклидовом пространстве точек $\mathcal{E}_n$, а, значит, и новые свойства этого пространства.

Определение OV.16. *Система координат $\Re\{O;\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n\}$ в $\mathcal{E}_n$, где $\{\vec{i}_k\}_n$ - ортонормированный базис называется прямоугольной системой координат.*

Пусть $\Re\{O;\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n\}$ и $\Re\{O;\vec{i'}_1,\dots,\vec{i'}_n\}$ — две прямоугольные системы координат в E_n с общим началом, т.е. совершается переход от одного ортонормированного базиса к другому. Обозначим матрицу перехода от нештрихованного базиса к штрихованному через $C=(C^m_{'k})$, так что вектор

$$\vec{i'}_k = C^m_{'k}\vec{i}_m\,.$$

Элементы матрицы перехода связаны соотношением

$$\sum_{p=1}^{n} C^p_{'k}C^p_{'s} = \delta_{ks},$$

которое совпадает с (V.24) и показывает, что *матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому необходимо является ортогональной матрицей.*

Обратно, если задана некоторая ортогональная матрица $A=(\alpha^i_k)$, то, как известно, она невырожденная и с ее помощью можно осуществить переход от одного базиса к другому. Пусть $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$ — ортонормированный базис в E_n. Построим векторы

$$\vec{e'}_k = \sum_{m=1}^{n}\alpha^m_k\vec{i}_m\,.$$

Таким образом, существует *взаимно-однозначное соответствие между ортогональными матрицами и вращением базиса (репера) в пространстве E_n.* Если детерминант ортогональной матрицы перехода равен $+1$, то вращения называются *собственными* (ориентация репера сохраняется, например, в E_3 правая тройка переходит в правую), если же детерминант ортогональной матрицы перехода равен -1, то вращения называются *несобственными* (ориентация репера меняется, например, в E_3 правая тройка переходит в левую).

Применяя формулы преобразования координат в произвольном случае, мы можем написать формулы преобразования от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат, когда перенесено и начало координат:

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{(а)} & x^k = C^k_{'m}x'^m + \alpha^k \\ \textbf{(б)} & x'^k = C'^k_m + \alpha'^k \end{array}\right\}, \tag{V.32}$$

или в матричной форме

$$\begin{array}{ll} \textbf{(а)} & (\vec{x}) = C(\vec{x})' + (\vec{\alpha}) \\ \textbf{(б)} & (\vec{x})' = C^{-1}(\vec{x}) + (\vec{\alpha})' \end{array}, \tag{V.33}$$

где $C=(C^k_{'m})$ — ортогональная матрица и, следовательно, в (V.33)(б) C^{-1} может быть заменено на C^T согласно (V.26).

V.4 Группа движений евклидова пространства

Определение OV.17. *Преобразование евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$, заданное упорядоченной парой декартовых реперов $\Re\{O;\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$, $\Re\{O';\vec{e'}_1,\dots,\vec{e'}_n\}$, называется движением евклидова пространства.*

Таким образом, движение является частным случаем аффинного преобразования, связывающие не произвольные базисы пространства переносов, $\{\vec{e}_i\}_n$ и $\{\vec{e}_{'j}\}_n$, а именно — ортонормированные:

$$\{\vec{e}_i\}_n|\{(\vec{e}_i\,\vec{e}_k) = \delta_{ik}\} \longrightarrow \{\vec{e}_{'i}\}_n|\{(\vec{e}_{'i}\,\vec{e}_{'k}) = \delta_{'i'k}\}, \tag{V.34}$$

которые согласно результатам предудущего раздела TV.7 связаны ортогональной матрицей перехода, C, такой, что:

$$C^T \cdot C = E \Longleftrightarrow {}^{-1} = C^T, \tag{V.35}$$

причем вследствие (V.35):

$$\det C = \pm 1. \tag{V.36}$$

> Следует заметить, что часто студенты в качестве определения ортогональной матрицы указывают условие (V.36) вместо условий (V.35). Надо отчетливо понимать, что (V.35), вообще говоря, представляют собой n^2 алгебраических уравнений, а условие (V.36) — всего одно, которое является простым *следствием* соотношений (V.35).

Следует также заметить, что движения евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$ всегда порождают ортогональные преобразования евклидова векторного пространства переносов, E_n, которые задаются упорядоченной парой ортонормированных базисов.

Теорема TV.8. *Все множество движений n-мерного евклидова пространства, $\mathcal{E}_n$, образует группу преобразований порядка $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Обычно группа движения обозначается $\mathcal{D}_{n;N}$. На евклидовой плоскости порядок группы движений равен 3, в трехмерном евклидовом пространстве — 6. Из определения OV.17 ясно, что группа движений, $\mathcal{D}_{n;n(n+1)/2}$ евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ является подгруппой группы аффинных преобразований $\mathcal{A}^{n;n(n+1)}$: $\mathcal{D}_{n;/,n(n+1)/2} \subset \mathcal{A}_{n;/,n(n+1}$, причем ее порядок ровно в 2 раза меньше порядка последней.

Конгруэнтность фигур

Напомним, что *фигурой аффинного пространства* называется любое множество точек аффинного пространства. Рассмотрим две фигуры F и F' евклидова пространства.

Определение OV.18. *Если существует такое движение $\mathcal{D}$ евклидова пространства точек $\mathcal{E}_n$, при котором все точки фигуры F отображаются во все точки фигуры F', то фигуры F и F' называются конгруэнтными друг другу:*

$$F \cong F' \Longleftrightarrow \exists\, f \in \mathcal{D}|f(F) = F'. \tag{V.37}$$

Следует особо подчеркнуть, что нельзя путать отношения *равенства* и *конгруэнтности*: первое определено на множестве чисел, второе - на множестве точек. Две равные точки - это одна и та же точка, поэтому две равные фигуры - это одна и та же фигура. Конгруэнтные же фигуры - это различные фигуры, которые можно совместить подходящим движением.

V.5 Движения первого и второго рода

Движения евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$, генерируются ортогональными преобразованиями его евклидова пространства переносов, E_n. Как мы отмечали выше, из определения ортогональной матрицы C (V.35) следует свойство ее определителя (V.36):

$$\det C = \pm 1.$$

Определение OV.19. *Движения евклидова пространства $\mathcal{D}_n$, порождаемые матрицей перехода C с определителем, равным $+1$, называются движениями I-го рода, а движения $\mathcal{D}_n$, порождаемые матрицей перехода C с определителем, равным -1, называются движениями II-го рода:*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{D}_n \quad |\det C = 1 & \to & \mathrm{I} - \mathcal{D}_n^I; \\ \mathcal{D}_n \quad |\det C = -1 & \to & \mathrm{II} - \mathcal{D}_n^{II} \end{array} \tag{V.38}$$

Теорема TV.9. *Движения первого рода, $\mathcal{D}_n^I$ образуют подгруппу группы движений $\mathcal{D}_n$ евклидова пространства, $\mathcal{E}_n$, а движения второго рода, $\mathcal{D}_n^{II}$, подгруппы не образуют.*

Как известно, все базисы векторного пространства делятся на два непересекающиеся класса, каждый из которых связан матрицей перехода с положительным определителем, а базисы различных классов связаны матрицей перехода с отрицательным определителем. Каждый из классов базисов определяет ориентацию векторного пространства, одну из которых можно назвать правой, а другую - левой. Таким образом, движения первого рода связывают одноименные базисы и тем самым не нарушают ориентацию пространства, в то время, как движения второго рода связывают разноименные базисы и изменяют ориентацию пространства.

V.6 Инварианты движений

Рассмотрим ортогональные преобразования евклидова векторного пространства, для которых справедлива теорема:

Теорема TV.10. *При ортогональных преобразованиях евклидова векторного пространства E_n не изменяется скалярное произведение любых двух векторов:*

$$(\vec{x}\vec{y}) = (\vec{x}'\vec{y}'), \qquad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n). \tag{V.39}$$

Вследствие этого важного инвариантного свойства ортогональных преобразований евклидова векторного пространства E_n и определения длин векторов и углов между ними с помощью метрической билинейной формы существует еще два важных инварианта ортогональных преобразований евклидова векторного пространства:

Теорема TV.11. *При ортогональных преобразованиях евклидова векторного пространства сохраняются длины любых векторов и углы между ними.*

Далее, расстояние между любыми двумя точками A, B евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$, определяется как длина соответствующего геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$, а углы между прямыми (плоскостями) в евклидовом пространстве точек определяются как углы между соответствующими направляющими (нормальными) векторами. Отсюда следует важная теорема:

Теорема TV.12. *Расстояния между любыми точками и углы между любыми прямыми (плоскостями) евклидова пространства точек $\mathcal{E}_n$ являются инвариантами движений.*

Можно доказать и обратную теорему:

Теорема TV.13. *Если аффинное преобразование сохраняет расстояние между любыми двумя точками евклидова пространства, то это преобразование является движением.*

> В некоторых учебниках геометрии именно теорема TV.13 выступает в роли определения движения: движением *называется* преобразование евклидова пространства точек, сохраняющее расстояние между любой парой точек.

Дадим еще одно полезное определение:

Определение OV.20. *Точка $M_* \in \mathcal{E}_n$ называется инвариантной (неподвижной) точкой аффинного преобразования $f \in \mathcal{A}_{n,N}$, если:*

$$f(M_*) = M_*. \tag{V.40}$$

Пусть точка M_* в некотором аффинном репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ имеет координаты $M_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$. Тогда из определения (V.40) и формул общего аффинного преобразования (IV.30) следуют алгебраические условия на координаты инвариантной точки:

$$x_*^i = C'^i_k x_*^k + x_0^i.$$

Таким образом, координаты инвариантной точки любого аффинного преобразования f определяются системой линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$(C'^i_k - \delta^i_k) x_*^k = x_0^i. \tag{V.41}$$

Учитывая, что мы рассматриваем в этой главе ортонормированные базисы и движения, описываемые ортогональными матрицами преобразования, уравнения (V.41) можно записать еще в другой эквивалентной форме:

$$(\delta^i_k - C^i_{\prime k}) x_*^k = C^i_{\prime k} x_0^k. \tag{V.42}$$

Движения плоскости

В качестве конкретной группы движений рассмотрим сначала движения евклидовой плоскости, $\mathcal{E}_2$. Согласно вышеизложенному группа движений плоскости имеет порядок

$$N = \frac{n(n+1)}{2} = 3.$$

Таким образом, на плоскости мы имеем группу движений $\mathcal{D}_{2;3}$.

Формулы движения плоскости

Выпишем сначала общие формулы аффинных преобразований плоскости (IV.30), определяемых упорядоченной парой аффинных реперов, $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\Re\{O'; \vec{e}_{\prime 1}, \vec{e}_{\prime 2}\}$, полагая для плоскости $x^1 = x, x^2 = y$:

$$\begin{array}{l} x' = C'^1_1 x + C'^1_2 y + x_0 \\ y' = C'^2_1 x + c'^2_2 y + y_0 \end{array}, \tag{V.43}$$

где $||C'^i_k|| = c^{-1}$ - матрица, обратная к матрице перехода C. Для простоты записи введем обозначения:

$$C'^1_1 = \alpha;\ C'^1_2 = \beta;\ C'^2_1 = \gamma;\ C'^2_2 = \delta.$$

Таким образом:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы рассматриваем движение, и матрица перехода является ортогональной, то ее элементы получаются транспонированием:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь условие ортогональности матрицы перехода (V.35):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, учитывая симметрию произведения, получим формулы движения плоскости:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\phi - y\varepsilon\sin\phi + x_0; \\ y' &= x\sin\phi + y\varepsilon\cos\phi + y_0, \end{aligned} \tag{V.44}$$

где $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ - вектор параллельного переноса. Числа ϕ, x_0, y_0 и являются независимыми параметрами группы движения плоскости. В случае собственных вращений ϕ является по смыслу углом поворота декартовой системы координат.

Классификация движений плоскости

Рассмотрим уравнения (V.42) для нахождения *инвариантной точки движения* плоскости. Используя формулы движения плоскости (V.44), получим систему уравнений для координат инвариантной точки плоскости $M(x, y)$[2]:

$$\begin{array}{rcl} x(1-\cos\phi) + y\varepsilon\sin\phi & = & x_0, \\ -x\sin\phi + y(1-\varepsilon\cos\phi) & = & y_0. \end{array} \tag{V.45}$$

Определитель системы (V.45) равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & 1-\varepsilon\cos\phi \end{vmatrix} = (1+\varepsilon)(1-\cos\phi) = 2(1+\varepsilon)\sin^2\frac{\phi}{2}. \tag{V.46}$$

Итак, пусть движение плоскости, f, задано упорядоченной парой аффинных реперов: $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\Re\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$б , причем $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. Возможны различные случаи решения системы (V.45) в зависимости от величины ε в определителе определителе (V.46).

1. Движение первого рода: $\varepsilon = 1$.

а). $\Delta \neq 0 \Longleftrightarrow \phi \neq 0$, т.е., $\vec{e'}_i \neq \vec{e}_i$. В этом случае, как известно, система уравнений (V.45) имеет одно и только одно решение, а, следовательно, движение f имеет одну и только одну инвариантную точку:

$$M_S(x_s, y_s)| : \begin{array}{rcl} x_s & = & x_s\cos\phi - y_s\varepsilon\sin\phi + x_0, \\ y_s & = & x_s\sin\phi + y_s\varepsilon\cos\phi + y_0. \end{array} \tag{V.47}$$

б). $\Delta = 0 \Longleftrightarrow \phi = 0$; ($\vec{e'}_i = \vec{e}_i$.) Тогда формулы движения (V.44) принимают вид:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + x_0, \\ y' & = & y + y_0 \end{array} \tag{V.48}$$

и определяют параллельный перенос плоскости на вектор $\vec{a} = (x_0, y_0)$. В этом случае, если вектор параллельного переноса ненулевой ($\vec{a} \neq \vec{0}$), то система уравнений (V.45) несовместна, следовательно, движение f в этом случае не имеет инвариантных точек. Если же $\vec{a} = \vec{0}$, движение становится тождественным преобразованием, и каждая точка плоскости является инвариантной.

[2] Значок$*$ мы опускаем.

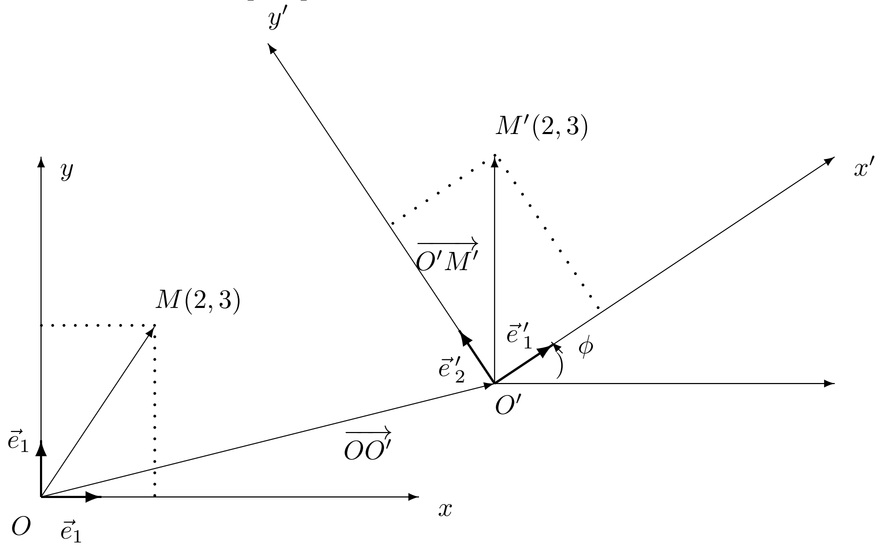


Рис.V.19. *Движение плоскости*

II. $\varepsilon = -1$, т.е., f - движение 2-го рода.

Для координат инвариантной точки получим:

$$M_S(x_s, y_s)\Big|: \begin{cases} \left(x_s \sin\frac{\phi}{2} - y_s \cos\frac{\phi}{2}\right)\sin\frac{\phi}{2} &= -\dfrac{x_0}{2}, \\ \left(x_s \sin\frac{\phi}{2} - y_s \cos\frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2} &= -\dfrac{y_0}{2}. \end{cases} \tag{V.49}$$

Движение 2-го рода является композицией *симметрии относительно оси* O_1y_1 и параллельного переноса вдоль оси O_1x_1. Инвариантная точка такого движения может существовать лишь отсутствии параллельного переноса, т.е., при условии:

$$x_0 \cos\frac{\phi}{2} + y_0 \cos\frac{\phi}{2} = 0.$$

Симметрию относительно оси в называется *осевой симметрией*, а композицию осевой симметрии и параллельного переноса - *скользящей симметрией.*

Таким образом, если движение 2-го рода имеет инвариантную точку, то f - осевая симметрия.

V.7 Задачи на движение

Пример ПV.1. *Преобразование евклидовой плоскости задано формулами:*

$$f: \quad \begin{cases} x' &= 2x + 5y + 4 \\ y' &= x + 3y - 4 \end{cases}$$

Выяснить, является ли это преобразование движением, и, если является, установить его род.

<u>Решение</u>

Составим матрицу соответствующего преобразования, C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Наиболее типичная и очень грубая ошибка, связанная с решением задач на движение, заключается в том, что **студенты по факту равенства ± 1 определителя матрицы преобразования делают вывод о том, что данное преобразование является движением**.

Вычисляя $\det C$, найдем

$$\det C = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1.$$

Отсюда делают ошибочный вывод, что f - движение I-го рода.

На самом же деле, определитель матрицы преобразования определяет тип движения лишь при условии, что это преобразование является движением, т.е., матрица преобразования ортогональна!:

$$C \cdot C^T = E. \tag{V.50}$$

Вычисляя указанное произведение для данной матрицы, найдем:

$$C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 17 \\ 17 & 10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, f не является движением.

Пример ПV.2. *Преобразование евклидовой плоскости задано формулами:*

$$\psi : \quad \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + 3 \\[2ex] y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 2 \end{cases}$$

Выяснить, является ли это преобразование движением, и, если является, установить его род.

<u>Решение</u>

Матрица преобразования C равна:

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \Longrightarrow \det C = -1.$$

Вычислим произведение матриц:

$$C \cdot C^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование ψ является движением II-го рода.

V.8 Задачи на квадратичные формы и квадрики

Пример ПV.3. *В E_n задана оболочка, натянутая на линейно независимые векторы*

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построить ортонормированный базис $\{g_1, g_2, g_3\}$ оболочки и перейти к новому ортонормированному базису в E_n, первыми тремя векторами которого служили бы $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$.
Решение. Пронормируем $\vec{f}_1$. Имеем $|\vec{f}_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Тогда

$$\vec{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}_1 - \vec{i}_2).$$

Находим что,

$$\alpha_1 = -(\vec{g_1}\,\vec{f_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \vec{f}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{g}_1 + \vec{f}_2 = \frac{1}{2}\vec{i}_1 - \frac{1}{2}\vec{i}_2 + \vec{i}_2 + 2\vec{i}_3 = \frac{1}{2}\vec{i}_1 + \frac{1}{2}\vec{i}_2 + 2\vec{i}_3.$$

Поэтому

$$\vec{g}_2 = \frac{\vec{f}_2'}{|\vec{f}'_2|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + 4\vec{i}_3).$$

Далее находим, что

$$\beta_1 = -(\vec{g_1}\,\vec{f_3}) = 0, \quad \beta_2 = -(\vec{g_2}\,\vec{f_3}) = -\frac{4}{3\sqrt{2}},$$

$$\vec{f}'_3 = -\frac{4}{3\sqrt{2}}\vec{g}_2 + \vec{f}_3 = -\frac{1}{9}(2\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 - \vec{i}_3) - \vec{i}_4.$$

Поэтому

$$\vec{g}_3 = -\frac{2}{3\sqrt{10}}\left(\vec{i}_1 + \vec{i}_2 - \frac{1}{2}\vec{i}_3 + \frac{9}{2}\vec{i}_4\right).$$

Решаем систему линейных уравнений (V.29)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}x^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 = 0 \\ &\frac{1}{3\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}x^2 + \frac{4}{3\sqrt{2}}x^3 = 0 \\ &-\frac{2}{3\sqrt{10}}x^1 - \frac{2}{3\sqrt{10}}x^2 + \frac{1}{3\sqrt{10}}x^3 - \frac{9}{3\sqrt{10}}x^4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -2c_1 \\ x^2 = -2c_1 \\ x^3 = x^4 = c_1 \\ x^5 = c_2. \end{cases}$$

Векторы нормальной фундаментальной системы решений имеют вид

$$x_1 = -2\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \vec{i}_4,\ x_2 = \vec{i}_5.$$

Поэтому

$$\vec{}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \vec{i}_4), \quad \vec{h}_2 = \vec{i}_5.$$

Ортогональная матрица перехода от базиса $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_5\}$ *к базису* $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ *имеет вид*

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{V.51}$$

Пример ПV.4. .

Привести ортогональными преобразованиями к каноническому виду квадратичную форму

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

и найти матрицу перехода от данного базиса к каноническому.
*Решение.*Найдем характеристический полином матрицы квадратичной формы

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3). \tag{V.52}$$

Из (V.52) следует, что A имеет собственное значение $\lambda_1 = 1$ кратности 3 и однократное собственное значение $\lambda_2 = -3$. Согласно теореме о каноническом виде квадратичной формы имеем следующий канонический вид квадратичной формы:

$$A(\vec{x}, \vec{x}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2. \tag{V.53}$$

Найдем ортогональной преобразование, осуществляющее приведение квадратичной формы к каноническому виду. С этой целью нам необходимо указать четыре единичных взаимно ортогональных собственных вектора матрицы A.

При $\lambda_1 = 1$ система уравнений $\sum\limits_{q=1}^{4}(\alpha_{pq} - \lambda_1\delta_{pq})x^q = 0$, соответствующая данному примеру, выглядит так:

$$\left.\begin{aligned} -x^1 + x^2x^3 - x^4 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0 \\ -x^1 + x^2 + x^3 - x^4 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{V.54}$$

Ранг матрицы системы равен 1 (уравнения $2, 3, 4$ совпадают с первыми). Поэтому

$$x^1 = x^2 + c^3 - c^4,\ x^2 = c^2,\ x^3 = c^3\ x^4 = c^4,$$

Строим нормальную фундаментальную систему решений. Имеем:

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя процесс ортогонализации и нормировки, приведем к следующим единичным взаимно ортогональным векторам:

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = -3$ система уравнений

$$\sum_{q=1}^{4} (\alpha_{pq} - \lambda_2 \delta_{pq}) x^q = 0$$

имеет ранг, равный трем, и нормальная фундаментальная система решений состоит из одного вектора

$$\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя собственный вектор $\vec{f}_4$, получим единичный собственный вектор, ортогональный к $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\vec{g}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом ортогональная матрица перехода от старого базиса к каноническому имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пример IIV.5. *Требуется привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$$

и указать преобразование координат.

Решение. Найдем собственные значения матрицы квадратичной формы

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0.$$

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -2.$$

Соответствующие им собственные векторы из - за $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ортогональны между собой, и их остается только пронормировать. Имеем

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, после преобразования координат, вызванного переходом к базису с векторами $\vec{g}_1, \vec{g}_2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \end{cases}$$

мы придем к уравнению

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 13 = 0.$$

Его можно преобразовать к следующему виду:

$$8\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 13 - 4 + 9 = 0.$$

После переноса начала координат:

$$x' = X + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = Y - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

получим следующее уравнение:

$$8X^2 - 2Y^2 = 8,$$

которое в канонической записи примет вид

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1. \tag{V.55}$$

Преобразование, связывающее координаты x, y и X, Y, легко устанавливается

$$\begin{cases} x = X\cos\dfrac{\pi}{4} - Y\sin\dfrac{\pi}{4} + 2 \\ y = X\sin\dfrac{\pi}{4} + Y\cos\dfrac{\pi}{4} - 1. \end{cases}$$

Таким образом, в новой системе координат, которая получена из старой поворотом на угол $\dfrac{\pi}{4}$ (против часовой стрелки) и переносом начала координат в точку $O'(2; -1)$, мы имеем гиперболу (V.55) с осью $O'X$ и асимптотами $Y = \pm 2X$.

Глава VI

Проективные пространства

VI.1 Определение проективного пространства

Пусть V - вещественное векторное пространство, и $V\backslash\{\vec{0}\}$ - дополнение нуль - вектора до векторного пространства V. Наряду с векторным пространством V рассмотрим непустое множество $\mathcal{P} \neq \varnothing$, элементы которого, $A, B, C, \ldots$ будем называть *точками*.

Определение OVI.1. *Непустое множество $\mathcal{P}$ называется проективным пространством над полем вещественных чисел $\mathcal{R}$ (или, просто - проективным пространством), если задано отображение*

$$\Phi : V\backslash\{\vec{0}\} \longrightarrow \mathcal{P}, \tag{VI.1}$$

удовлетворяющее двум условиям (аксиомам проективного пространства)

Аксиома AVI.1. *Отображение Φ - сюръективно*[1]*;*

Аксиома AVI.2. *Образы коллинеарных векторов, и только их, в отображении (VI.1) равны:*

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{y}) \Longleftrightarrow \vec{y} = \lambda\vec{x}, \qquad (\lambda \in \mathcal{R}\backslash 0). \tag{VI.2}$$

Подчеркнем, что отображение Φ не является взаимно однозначным: множество **всех** коллинеарных между собой векторов[2] векторного пространства V отображается в одну и ту же точку:

$$\Phi(\vec{x}) = X \Longrightarrow \Phi(\lambda\vec{x}) = X.$$

Таким образом, каждой точке в проективном пространстве $\mathcal{P}$ соответствует множество всех коллинеарных между собой векторов в векторном пространстве V. Если $\Phi(\vec{x}) = X$, будем говорить, что *вектор $\vec{x}$ порождает точку X*. Таким образом, все коллинеарные между собой векторы порождают одну и ту же точку.

Определение OVI.2. *Если* $\dim V = n + 1$, *то проективное пространство $\mathcal{P}$ называется n-мерным:* $\dim \mathcal{P} = n$ *и обозначается как $\mathcal{P}_n$.*

[1] Т.е. любой элемент из $\mathcal{P}$ имеет хотя бы один прообраз.

[2] А таких векторов бесконечно много.

Определение OVI.3. *Пусть $V_{k+1} \subset V_{n+1}$ — $(k+1)$ - мерное подпространство векторного пространства V_{n+1}, а $\mathcal{P}_n = \Phi(V_n \backslash \{\vec{0}\})$ - n - мерное проективное пространство. Тогда множество*

$$\Phi(V_{k+1} \backslash \{\vec{0}\}) \subset \mathcal{P}_n$$

называется k-мерной проективной плоскостью $\Pi_k \subset \mathcal{P}_n$ проективного пространства. При этом одномерная проективная плоскость $(k=1)$ называется проективной прямой, а двумерная проективная плоскость $(k=2)$ называется просто - проективной плоскостью.

Модели проективного пространства

Введем отношение Δ в множестве $V \backslash \{\vec{0}\}$. Будем говорить, что два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из множества $V \backslash \{\vec{0}\}$ *находятся в отношении Δ: $\vec{x}\Delta\vec{y}$, если они коллинеарны*, т.е.:

$$\vec{x}\Delta\vec{y}, \quad \text{если} \quad \exists\lambda \in \mathcal{R}\backslash 0 \,\Big|\, \vec{x} = \lambda\vec{y}; \quad \Big(\vec{x}, \vec{y} \in V \backslash \{\vec{0}\}\Big). \tag{VI.3}$$

Теорема TVI.1. *Отношение коллинеарности, Δ, является отношением эквивалентности в множестве $V \backslash \{\vec{0}\}$.*

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\vec{a} \in V \backslash \{\vec{0}\}$ а также множество всех ненулевых векторов, коллинеарных вектору $\vec{a}$:

$$A = \{\vec{x}_a \in V \backslash \{\vec{0}\} \,\Big|\, \vec{x}_a = \lambda\vec{a}; \quad \{\lambda\} \stackrel{\rightarrow}{=} \mathcal{R}\backslash 0\} \,.$$

Сопоставим этому множеству *всех* коллинеарных между собой векторов один элемент, например, тот же самый ненулевой вектор $\vec{a}$. В результате такой операции мы получим *фактормножество*, которое обозначим $P(V)$:

$$P(V) \stackrel{def}{=} V \backslash \{\vec{0}\}/\Delta.$$

Указанную процедуру можно рассматривать как отображение Φ_0 множества $V \backslash \{\vec{0}\}$ на $P(V)$, такое, что $\Phi_0(\vec{x})$ есть тот класс эквивалентности по отношению к Δ, который содержит вектор $\vec{x}$. Очевидно, что *каноническое отображение* Φ_0:

$$\Phi_0 \,: (V \backslash \{\vec{0}\}) \longrightarrow P(V) \tag{VI.4}$$

удовлетворяет аксиомам 1,2 проективного пространства OVI.1. Таким образом, $P(V)$ является проективным пространством над полем вещественных чисел. Построенное таким образом проективное пространство называется *проективным пространством, порожденным векторным пространством V*.

Пусть векторное пространство V имеет размерность $n+1$: $\dim V = n+1$, т.е., $V = V_{n+1}$. Согласно определению размерности проективного пространства OVI.2 размерность проективного пространства $P(V)$ равна $\dim V = n$. В этом случае проективное пространство $P(V)$ обозначается как $P_n(V)$.

VI.2 Проективные координаты

Рассмотрим $n+1$-мерное векторное пространство V_{n+1} и в нем пару базисов $\{\vec{e}_i\}_{n+1}$, $\{\vec{g}_i\}_n$; $(i = \overline{0, n}.)$

Определение OVI.4. *Два базиса, $\{\vec{e}_i\}_n$ и $\{\vec{g}_i\}_n$ векторного пространства V_{n+1} называются* гомотетичными*, если:*

$$\exists\lambda \in \mathcal{R} \,\big|\, \vec{e}_i = \lambda\vec{g}_i\,; \quad (i = \overline{0, n}). \tag{VI.5}$$

Согласно теореме TVI.1 отношение гомотетичности, Γ, является отношением эквивалентности на множестве всех базисов векторного пространства, так как Γ связывает пары коллинеарных между собой множеств векторов. Каждый базис, $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$, векторного пространства V_{n+1} в отображении:

$$\Phi : V_{n+1} \longrightarrow \mathcal{P}$$

порождает в проективном пространстве $P(V)$ $(n+1)$ точку $A_0, A_1, \ldots, A_n$, причем гомотетичные между собой базисы порождают одни и те же точки. С другой стороны каждый базис порождает только одну упорядоченную систему точек.

Определение OVI.5. *Проективным репером* $\Re(\{\vec{a}_i\}_n) \stackrel{def}{=} \Re(\vec{a}_i)$ *проективного пространства* $P(V)$ *называется множество всех гомотетичных между собой базисов векторного пространства* V.

Таким образом, проективный репер проективного пространства $\mathcal{P}_n$ можно определить и как упорядоченную систему $n+1$ точек.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{m} \in V_{n+1} \backslash \{\vec{0}\}$ и разложим его по базису $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$:

$$\vec{m} = x^i \vec{a}_i\,, \quad x^i \in \mathcal{R}; \quad i = \overline{0, n}. \tag{VI.6}$$

Так как $\vec{x}$ - ненулевой вектор, то все числа x^i одновременно не равны нулю. В отображении

$$\Phi : V_{n+1} \longrightarrow P_n(V)$$

вектор $\vec{m} \in V_{n+1} \backslash \{\vec{0}\}$ порождает точку $M = \Phi(\vec{m})$ проективного пространства $P_n(V)$.

Определение OVI.6. *Упорядоченная система чисел* $x^0, x^1, \ldots, x^n$), *одновременно не равных нулю, называется проективными координатами точки* $M = \Phi(\vec{m}) \in P(V)$.

При этом, как и в аффинной геометрии, будем писать: $M(x^0, x^1, \ldots, x^n)$.

Рассмотрим в векторном пространстве V_{n+1} наряду с базисом $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$ гомотетичный ему базис $\{\vec{b}_i\}_{n+1}$, так что:

$$\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i\,, \quad (\lambda \in \mathcal{R} \backslash 0, i = \overline{0, n}).$$

Разложим вектор $\vec{m}$ по каждому из этих базисов:

$$\vec{m} = x^i \vec{a}_i\,; \qquad \vec{m} = y^i \vec{b}_i \implies$$

$$\vec{m} = y^i \lambda \vec{a}_i \implies$$

$$x^i = \lambda y^i; \qquad (i = \overline{0, n}, \tag{VI.7}$$

откуда следует, что:

> Проективные координаты точки $M \in P(V)$ определены не однозначно, с точностью до общего ненулевого множителя.

Точки общего положения

Определение OVI.7. *Система различных* $(n+2)$ *точек* $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ n*-мерного проективного пространства* $\mathcal{P}_n$ *называется* точками общего положения, *если никакие* $(n+1)$ *точки из этой системы не принадлежат проективной плоскости размерности меньшей* n.

Это означает, что система точек общего положения в проективном пространстве размерности n порождается системой $(n+1)$ линейно независимых векторов $\mathcal{A} = \{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ векторного пространства V_n, (т.е., базисом векторного пространства), и еще одним ненулевым вектором, $\vec{e}$, таким, что система, состоящая из подсистемы n любых векторов из $\mathcal{A}$ и вектора $\vec{e}$, снова образовывала базис пространства V_{n+1}.

Для построения системы точек общего положения введем вектор:

$$\vec{e} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n\,, \tag{VI.8}$$

который определяет некоторую точку $E = \Phi(\vec{e})$ проективного пространства $P(V)$. В дальнейшем построенную таким образом точку будем называть *единичной точкой.*

Теорема TVI.2. *Если $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$ - упорядоченная система $(n+2)$ точек общего положения в n-мерном проективном пространстве $P_n(V)$, то существует и единственен проективный репер $\Re(\vec{a}_i\,)$, $(i = \overline{0,n})$, такой, что*

$$\Phi(\vec{a}_i\,) = A_i; \quad \Phi\left(\sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i\right) = E. \tag{VI.9}$$

Из этой теоремы следует, что на проективной прямой проективный репер однозначно определяется упорядоченной тройкой различных точек, $\Re = \{A_0, A_1, E\}$, а на проективной плоскости, - упорядоченной четверкой различных точек, $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$, из которых никакие три не лежат на проективной прямой.

VI.3 Расширенная прямая

Согласно сказанному в разделе OVI.3 в качестве модели проективной прямой $P_1(V_2)$ рассмотрим пучок прямых, $\mathcal{P}(O)$, на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$. В этом отображении, $\Psi : \mathcal{P}(O) \longrightarrow P_1(V)$, каждой прямой пучка, $d_i \in \mathcal{P}(O)$, соответствует одна точка M_i проективной прямой $M_i \in P_1(V)$. Мы же для наглядности, хотим поместить эту проективную прямую, P_1, на аффинную плоскость $\mathbf{A}_2$.

Пусть $d \in \mathbf{A}_2$ произвольная прямая аффинной плоскости, не проходящая через центр пучка, т.е., $d \notin \mathcal{P}(O)$. Зададим отображение φ (обратное отображению Ψ) множества точек прямой $M \in d$ на множество прямых пучка

$$\varphi : M \longrightarrow \mathcal{P}(O) \tag{VI.10}$$

по закону:

$$\varphi(M \in d) = (OM). \tag{VI.11}$$

Такое отображение называется *перспективным отображением прямой d в пучок прямых $\mathcal{P}(O)$*. Таким образом, в отображении φ каждой точке прямой M соответствует та прямая пучка $\mathcal{P}(O)$, которая пересекается с прямой d в этой точке, т.е., $M = d \cap \mathcal{P}(O)$ (см. Рис.VI.20). Очевидно, что это отображение инъективно:

$$M_1 \neq M_2 \Longrightarrow \varphi(M_1) \neq \varphi(M_2),$$

но не сюръективно, так как в пучке прямых $\mathcal{P}(O)$ содержится прямая d_0, параллельная прямой d, которая не пересекает ее. В обратном к φ отображению Ψ этой прямой пучка не соответствует никакая точка прямой d. Этого и следовало ожидать, так как аффинная прямая, будучи одномерным аффинным пространством $\mathbf{A}_1$, не является проективной прямой, т.е., одномерным проективным пространством P_1.

Для того, чтобы отображение φ было сюръективным, проделаем следующую формальную логическую операцию. Добавим к этой прямой некоторую новую точку, M_∞, так, чтобы образом этой точки в отображении φ как раз и являлась прямая пучка $d_0 \parallel d$, параллельная нашей прямой d :

$$\varphi(M_\infty) = d_0. \tag{VI.12}$$

В дальнейшем прямую $d_0 \parallel d$ пучка $\mathcal{P}(O)$ будем называть *особой прямой пучка*, а точку M_∞ (VI.12) - *несобственной точкой прямой d*. При этом отображение φ становится сюръективным, а, значит, и биективным, а обратное к нему отображение Ψ удовлетворяет аксиомам проективного пространства, следовательно, множество:

$$\overline{d} = d \cap M_\infty \tag{VI.13}$$

является одномерным проективным пространством P_1, или - проективной прямой. Такая аффинная модель $\overline{d}$ проективной прямой P_1 называется *расширенной прямой*, а сама процедура дополнения аффинной прямой до расширенной называется *расширением прямой.*

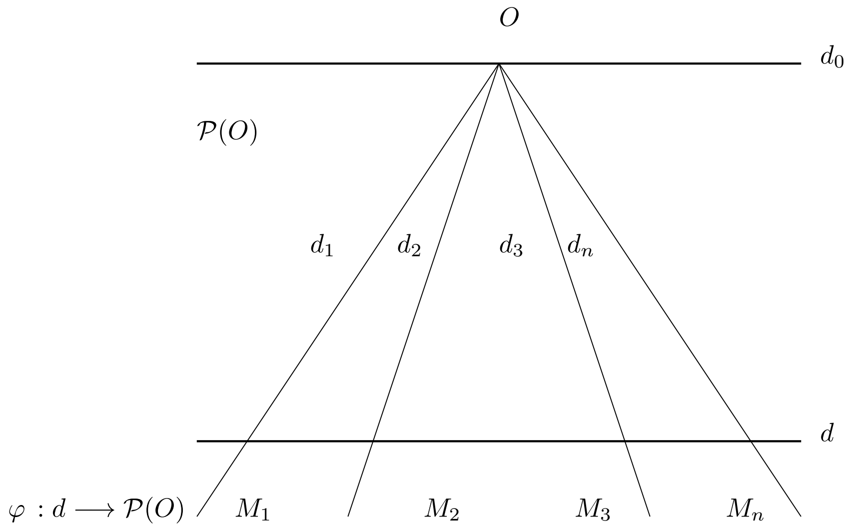


Рис.VI.20. *Перспективное отображение прямой в пучок прямых*

VI.4 Проективные реперы на расширенной прямой

Согласно предыдущему проективный репер на расширенной прямой $\overline{d} = P_1$ определяется упорядоченной тройкой различных точек этой прямой:

$$\Re = \{A_0, A_1, E\}; \qquad (A_1, A_2, E \neq).$$

При этом положение любой точки M этой прямой определяется ее проективными координатами, т.е., упорядоченной парой чисел: (x^0, x^1).

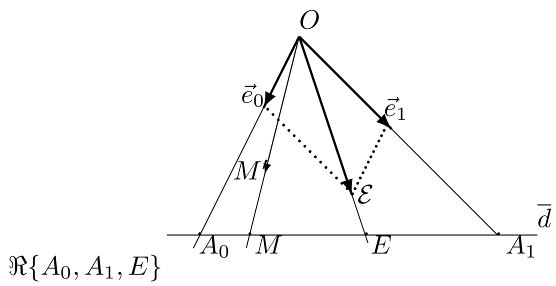


Рис.VI.21. *Проективный репер на собственных точках прямой*

Пусть на аффинной плоскости заданы пучок прямых, $\mathcal{P}O$, и прямая $\overline{d}$, не проходящая через его центр, и пусть на прямой d задана упорядоченная тройка ее собственных точек, $\{A_0, A_1, E\}$. Также на этой прямой зададим произвольную точку M (см. Рис.VI.21). Как найти проективные координаты точки M? Для этого на прямой (OE) возьмем *произвольную* точку $\mathcal{E}$ и отложим вектор $\overrightarrow{OE}$.

Методически проще всего при этом выбирать в качестве $\mathcal{E}$ саму единичную точку E. Далее отложим вдоль прямых (OA_0) и (OA_1) пучка $\mathcal{P}(O)$ векторы $\vec{e}_0$ и $\vec{e}_1$, так, чтобы:

$$\vec{e}_0 + \vec{e}_1 = \overrightarrow{O\mathcal{E}}.$$

Ясно, что векторы $\vec{e}_0, \vec{e}_1$ при *заданной* точке $\mathcal{E}$ определяются однозначно. Выберем эти векторы в качестве векторов базиса и разложим по нему любой вектор, коллинеарный $\overrightarrow{OM}$, например, вектор $\overrightarrow{OM'}$ (см. Рис.VI.21). Поскольку базис при этом автоматически получился согласованным, то координаты вектора $\overrightarrow{OM'}$ в этом базисе:

$$\overrightarrow{OM'} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 \qquad \text{(VI.14)}$$

согласно определению OVI.7 и теореме TVI.2 и будут являться искомыми проективными координатами точки M на проективной прямой, $M(x^0, x^1)$.

VI.5 Проективные реперы на расширенной плоскости

Проективный репер, $\Re$, расширенной плоскости $\overline{\Pi}$, как модели проективной плоскости, определяется упорядоченной четверкой точек общего положения,

$$\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\},$$

из которых *никакие три не лежат на одной расширенной прямой.*

Возьмем произвольную точку M' на прямой (OM) связки $\mathcal{S}(O)$, отложим на ней вектор $\vec{m} = \overrightarrow{OM'}$ и разложим его по базису $\{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,\}$:

$$\overrightarrow{OM'} = x^i\vec{a}_i\; = x^0\vec{a}_0\, + x^1\vec{e}_1\, + x^2\vec{a}_2\,. \tag{VI.15}$$

По определению OVI.7 упорядоченная система чисел x^0, x^1, x^2 и является искомыми проективными координатами точки M : $\quad (M(x^0, x^1, x^2).)$

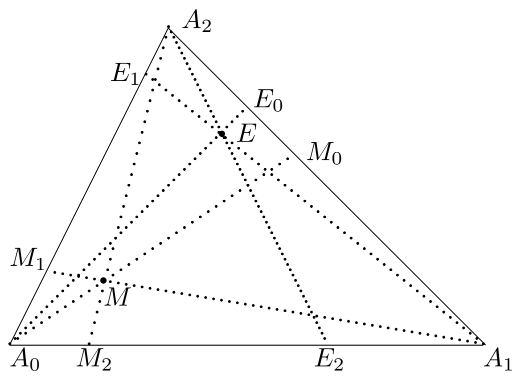


Рис.VI.22. *Проективный репер на плоскости*

Прямые (OM), (OA_2) и (OE) связки $\mathcal{S}(O)$ определяют векторы $\vec{m}$, $\vec{a}_2$ и $\vec{e}$ и пару соответствующих плоскостей (MOA_2) и (EOA_2) связки плоскостей $\mathbf{S}(O)$. Пересечение этих плоскостей с плоскостью Π есть прямые (A_2M) и (A_2E). Пересечение плоскости $(A_0OA_1) \in \mathbf{S}(O)$ с плоскостью Π, очевидно, есть прямая (A_0A_1).

Определим на сторонах треугольника $\Delta A_0A_1A_2$ две тройки точек $\{M_0, M_1, M_2\}$, $\{E_0, E_1, E_2\}$:

$$\begin{aligned}
&(A_0M)\cap(A_1A_2) \overset{def}{=} M_0; \qquad && (A_0E)\cap(A_1A_2) \overset{def}{=} E_0;\\
&(A_1M)\cap(A_0A_2) \overset{def}{=} M_1; && (A_1E)\cap(A_0A_2) \overset{def}{=} E_1;\\
&(A_2M)\cap(A_0A_1) \overset{def}{=} M_2; && (A_2E)\cap(A_0A_1) \overset{def}{=} E_2.
\end{aligned} \tag{VI.16}$$

Будем называть в дальнейшем указанные точки M_i, E_i $(i = \overline{0,2})$ *проекциями точек M, E из центров проектирования A_i на прямые (A_kA_j), $(i, j, k \neq)$.*

Обозначим:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_0 &\overset{def}{=} \vec{a}_1\, + \vec{a}_2\,;\\
\vec{e}_1 &\overset{def}{=} \vec{a}_0\, + \vec{a}_2\,;\\
\vec{e}_2 &\overset{def}{=} \vec{a}_0\, + \vec{a}_1\,.
\end{aligned} \tag{VI.17}$$

Соответствующие геометрические векторы принадлежат следующим боковым граням тетраэдра $OA_0A_1A_2$:

$$\vec{e}_0\, \in (OA_1A_2); \quad \vec{e}_1\, \in (OA_0A_2); \quad \vec{e}_2\, \in (OA_0A_1).$$

Справедлива следующая *теорема о проективном репере*:

Теорема TVI.3. *Пусть $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ - проективный репер на плоскости Π и $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ - проективные координаты точки M в репере $\Re$, а E_i, M_i $(i = \overline{0,2})$ - проекции точек $E, M \in Pi$ из центров проектирования A_i на прямые (A_jA_k) $(i, j, k \neq)$. Тогда (x^1, x^2) -проективные координаты точки M_0 относительно репера $\Re_0 = \{A_1, A_2, E_0\}$; на прямой (A_1A_2); $\quad (x^0, x^2)$ - проективные координаты точки M_1 относительно репера $\Re_1 = \{A_0, A_2, E_1\}$; на прямой (A_0A_2); и $\quad (x^0, x^1)$ - проективные координаты точки M_2 относительно репера $\Re_2 = \{A_0, A_1, E_2\}$.*

VI.6 Сложное отношение четырех точек прямой

Определение сложного отношения

На проективной прямой P_1[3] рассмотрим упорядоченную четверку различных точек A, B, C, D и проективный репер $\Re = \{A_0, A_1, E\}$. Пусть в этом репере точки A, B, C, D имеют следующие координаты: $A(x^0, x^1)$, $B(y^0, y^1)$, $C(z^0, z^1)$, $D(u^0, u^1)$.

Определение OVI.8. *Двойным (или сложным) отношением четырех точек A, B, C, D прямой называется число:*

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix}}. \tag{VI.18}$$

В дальнейшем для краткости будем записывать формулу (TVI.4) в более компактном виде:

$$(AB, CD) = \frac{(AC) \cdot (BD)}{(AD) \cdot (BC)}, \tag{VI.19}$$

где (XY) - определитель, составленный из координат точек X и Y.

Свойства сложного отношения

Теорема TVI.4. *Сложное отношение четырех точек прямой не зависит от выбора репера прямой.*

Доказательство: $\langle\langle$ Наряду с репером $\Re$ рассмотрим репер $\overline{\Re}$, в котором указанные точки прямой имеют координаты:

$$A(\overline{x}^0, \overline{x}^1),\ B(\overline{y}^0, \overline{y}^1),\ C(\overline{z^0}, \overline{z}^1),\ D(\overline{u}^0, \overline{u}^1).$$

Пусть матрица перехода $||C^i_{\prime k}||$, описывающая преобразование проективных координат при переходе от репера $\Re$ к реперу $\overline{\Re}$, есть:

$$||C^i_{\prime k}|| = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда формулы преобразования от новых координат к старым имеют вид:

$$x^i = C^i_{\prime k}\overline{x}^k \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x^0 & = & \alpha\overline{x}^0 + \beta\overline{x}^1\,; \\ x^1 & = & \gamma\overline{x}^0 + \delta\overline{x}^1 \end{array}.$$

Аналогичный вид формулы преобразования будут иметь и для координат других точек.

Подсчитаем определитель, входящий в определение двойного отношения (TVI.4):

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\overline{x}^0 + \beta\overline{x}^1 & \gamma\overline{x}^0 + \delta\overline{x}^1 \\ \alpha\overline{z}^0 + \beta\overline{z}^1 & \gamma\overline{z}^0 + \delta\overline{z}^1 \end{vmatrix}.$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц, получим окончательно:

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x}^0 & \overline{x}^1 \\ \overline{z}^0 & \overline{z}^1 \end{vmatrix} \Delta. \tag{VI.20}$$

Аналогично найдем:

$$\begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{y}^0 & \overline{y}^1 \\ \overline{u}^0 & \overline{u}^1 \end{vmatrix} \Delta; \begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x}^0 & \overline{x}^1 \\ \overline{u}^0 & \overline{u}^1 \end{vmatrix} \Delta; \begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{y}^0 & \overline{y}^1 \\ \overline{z}^0 & \overline{z}^1 \end{vmatrix} \Delta.$$

[3] В дальнейшем для краткости будем часто обозначать $P_1 = P_1(V_2)$, $P_2 = P_2(V_3)$.

Подставляя эти выражения в правую часть (TVI.4) и производя сокращения, убедимся в справедливости теоремы. $\rangle\rangle$

Теорема TVI.5. *Если A, B, C, D - собственные точки, а D_∞ - несобственная точка расширенной прямой, то*

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}, \tag{VI.21}$$

$$(AB, CD_\infty) = -(AB, C), \tag{VI.22}$$

где (AB, C) и (AB, D) - простые отношения троек соответствующих точек.

Возьмем в качестве репера на проективной прямой, P_1, репер $\Re = \{A, B, C\}$. В этом репере точки A, B, C имеют координаты: $A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1)$. Тогда из (TVI.4) найдем сложное отношение:

$$(AB, CD) = \frac{u^0}{u^1}. \tag{VI.23}$$

Вследствие независимости сложного отношения отсюда следует важный вывод:

> При фиксированных точках A, B, C проективной прямой любая ее текущая точка, D, однозначно определяется двойным отношением (AB, CD).

Сформулируем и докажем основные свойства сложного отношения (TVI.4).

Свойство $\bar{\text{C}}$VI.1. *Сложное отношение не изменяется при перестановке первой и второй пар точек:*

$$(CD, AB) = (AB, CD). \tag{VI.24}$$

Свойство $\bar{\text{C}}$VI.2. *При перемене местами точек одной пары сложное отношение меняет свое значение на обратное:*

$$(BA, CD) = (AB, DC) = (AB, CD)^{-1}. \tag{VI.25}$$

Свойство $\bar{\text{C}}$VI.3. *При перемене местами точек каждой пары сложное отношение не изменяется:*

$$(BA, DC) = (AB, CD). \tag{VI.26}$$

Свойство $\bar{\text{C}}$VI.4. *Пусть $D \neq A$, тогда:*

$$\begin{aligned} (AB, CD) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad D = B, \\ (AB, CD) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad D = C. \end{aligned} \tag{VI.27}$$

Теорема TVI.6. *При любом проективном преобразовании плоскости сложное отношение четырех точек прямой не изменяется.*

Вследствие этой теоремы сложное отношение четырех точек сохраняется при любом проективном отображении прямой на другую прямую.

Теорема TVI.7. *Если биекция $\varphi : d \longrightarrow d'$ сохраняет сложное отношение любой четверки точек, то φ — проективное отображение.*

Следствие CVI.1. *Биекция $\varphi : d \longrightarrow d'$ является проективным отображением тогда и только тогда, когда она сохраняет сложное отношение любой четверки точек.*

Сложное отношение прямых

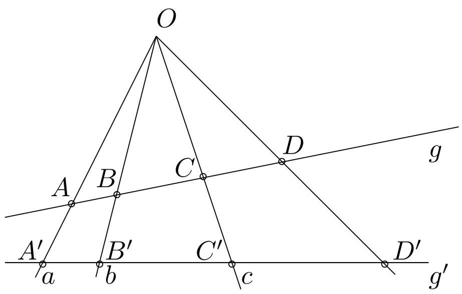


Рис.VI.23. *Сложное отношение прямых пучка*

Определение OVI.9. *Пусть дан пучок $\mathcal{P}(O)$ и прямая $g \notin \mathcal{P}(O)$ не принадлежащая ему. Сложное отношение точек пересечения (AB, CD) прямой g с соответствующими прямыми пучка, a, b, c, d, называется сложным отношением, (ab, cd), этих прямых.*

Теорема TVI.8. *Пусть a, b, c, d - четыре различных прямых пучка $\mathcal{P}(O)$ и прямая g не проходит через точку O. Тогда сложное отношение прямых, (ab, cd), не зависит от выбора прямой g.*

Доказательство: $\langle\langle$ Проведем еще какую-либо прямую g', не принадлежащую пучку $\mathcal{P}(O)$, т.е., $O \notin g'$. Тогда прямая g' пересекается с прямыми пучка a, b, c, d в различных точках A', B', C', D', соответственно (см. Рис.VI.23).

Пучок $\mathcal{P}(O)$ устанавливает перспективное отображение прямой g на прямую g' $\Psi : g \longrightarrow g'$ по закону:

$$\Psi(A) = a',\ \Psi(B) = B', \ldots$$

Так как перспективное отображение Ψ есть частный случай проективного, то $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. $\rangle\rangle$

Следствие CVI.2. *Биекция $\varphi : \mathcal{P}(O) \longrightarrow \mathcal{P}(O')$ одного пучка на другой является проективным отображением тогда и только тогда, когда она сохраняет сложное отношение любой упорядоченной четверки прямых.*

Нахождение сложного отношения по проективным координатам на плоскости

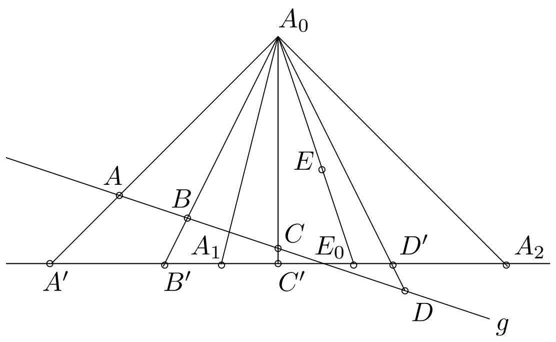


Рис.VI.24. *Нахождение сложного отношения по проективным координатам на плоскости*

Пусть на проективной плоскости своими координатами в проективном репере $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ даны четыре точки прямой $g\ :\ A(a^0, a^1, a^2,\ \ B(b^0, b^1, b^2),\ \ C(c^0, c^1, c^2)$, $D(d^0, d^1, d^2)$. Поставим задачу: найти сложное отношение (AB, CD).
Поскольку прямая g не проходит, по крайней мере, через одну из вершин репера, A_0, A_1, A_2, для определенности будем полагать, что $A_0 \notin g$ (см. Рис.VI.24). Рассмотрим перспективное отображение $\Phi : g \longrightarrow (A_1A_2)$ из центра перспективы O с помощью пучка прямых $\mathcal{P}(O)$. Вследствие доказанных выше свойств сложного отношения:

$$(AB, CD) = (A'B', C'D'). \tag{VI.28}$$

Возьмем на стороне (A_1A_2) реперного треугольника плоскости репер $\Re_0 = \{A_1, A_2, E_0\}$. Точки A', B', C', D' получаются из точек A, B, C, D проектированием их с из центра проектирования A_0 на прямую (A_1A_2). По теореме TVI.3 о проективном репере плоскости эти точки имеют следующие координаты в репере прямой, $\Re_0$:

$$A'(a^1, a^2);\ B'(b^1, b^2);\ C'(c^1, c^2);\ D'(d^1, d^2).$$

Поэтому:

$$(A'B', C'D') \stackrel{def}{=} \frac{(A'C')(B'D')}{(A'D')(B'C')} = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}}. \tag{VI.29}$$

Учитывая равенство (VI.28), найдем:

$$(AB, CD) = \frac{(A'C')(B'D')}{(A'D')(B'C')}. \tag{VI.30}$$

Таким образом, в случае, когда прямая g не проходит через вершину A_0 репера плоскости, $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$, двойное отношение четырех точек прямой g подсчитывается по стандартной формуле (TVI.4), в которой необходимо сделать замену для координат всех точек:

$$x^0 \to x^1; \qquad x^1 \to x^2.$$

Если же прямая не проходит через точку A_1 или A_2 реперного треугольника, проектирование необходимо осуществить из этих точек. В этих случаях получим аналогичные (VI.29) выражения с учетом необходимых замен координат.

Теорема TVI.9. *Если точка M имеет координаты (x^0, x^1, x^2) относительно репера $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ проективной плоскости, то отношение $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$ равно сложному отношению $(A_\alpha A_\beta, E_\gamma M_\gamma)$ четырех точек: двух вершин, A_α, A_β, и проекций, E_γ, M_γ, на прямую $(A_\alpha A_\beta)$ точек E, M из третьей вершины, A_γ, реперного треугольника (при условии $x^\beta \neq 0$, т.е., $M \notin (A_\alpha A_\beta)$).*

VI.7 Гармонические четверки точек

Определение OVI.10. *Четверка точек A, B, C, D называется гармонической, если*

$$(AB, CD) = -1. \tag{VI.31}$$

Говорят также, что точки C и D гармонически сопряжены относительно точек A и B, а также, что пары A, B и C, D гармонически разделяют друг друга.

Точку D при этом называют "четвертой гармонической точкой" к упорядоченной тройке точек A, B, C.

Из свойств сложного отношения (VI.24) - (VI.27) следует, что:

Сложное отношение гармонической четверки точек не изменяется не только при перестановке пар точек, но и при перестановке точек внутри любой пары:

$$(AB, CD) = -1 \Longrightarrow (CD, AB) = -1,\ (BA, CD) = -1,\ (AB, DC) = -1. \tag{VI.32}$$

Аналогичным свойством обладает и *гармоническая четверка прямых a, b, c, d пучка*, которая определяется условием:

$$(ab, cd) = -1. \tag{VI.33}$$

Пусть теперь A, B, C, D - точки общего положения на проективной плоскости. Проведем прямые через каждую пару из них. Всего таких прямых будет $\frac{1}{2}A_4^2 = 6$, (см. (Рис.VI.25)).

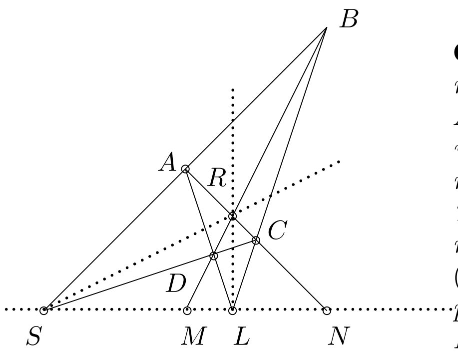


Рис.VI.25. *Полный четырехвершинник*

Определение OVI.11. *Фигура, образованная четырьмя точками общего положения, A, B, C, D, и шестью прямыми, проходящими через каждую пару точек, называется полным четырехвершинником.*
Точки A, B, C, D называются вершинами четырехвершинника, а прямые (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD) — сторонами четырехвершинника.
Всякие две стороны, не имеющие общей вершины, называются противоположными, точки R, S, L пересечения противоположных сторон называются диагональными точками, а прямые, $(RS), (RL), (SL)$, проходящие через диагональные точки — диагоналями четырехвершинника.

Пусть M и N — точки пересечения диагонали (SL) с противоположными сторонами, (AC) и (BD), проходящими через диагональную точку R :

$$M = (AC) \cap (SL); \qquad N = (BD) \cap (SL).$$

Докажем, что точки S, L, M, N образуют гармоническую четверку точек, т.е.:

$$(SL, MN) = -1. \tag{VI.34}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Проектируя точки S, L, M, N прямой (SL) на прямую (AC) из центра D, получим вследствие независимости сложного отношения от выбора прямой (теорема (TVI.8)):

$$S \to C, L \to A, M \to R, N \to N \Longrightarrow$$

$$(SL, MN) = (CA, RN). \tag{VI.35}$$

Проектируя затем точки A, R, C, N прямой (AC) обратно на прямую (SL) из центра проектирования B, аналогично получим:

$$A \to S, R \to M, C \to L, N \to N \Longrightarrow$$
$$(CA, RN) = (LS, MN). \tag{VI.36}$$

Таким образом, из (VI.35) и (VI.36) получим:

$$(SL, MN) = (LS, MN). \tag{VI.37}$$

Тогда по свойству (VI.25) сложного отношения:

$$(LS, MN) = (SL, MN)^{-1}. \tag{VI.38}$$

Таким образом, из (VI.37) и (VI.38) найдем:

$$(SL, MN)^2 = 1 \Longrightarrow (SL, MN) = \pm 1.$$

Но (SL, MN) не может равняться 1, так как тогда из свойства сложного отношения (VI.27) следовало бы $M = N$, что противоречит условию, так как в этом случае точки A, B, C, D окажутся лежащими на одной прямой. Следовательно

$$(SL, MN) = -1, \Longrightarrow$$
$$(AC, RN) = -1, \tag{VI.39}$$
$$((SA)(SC), (SR)(SN)) = -1. \tag{VI.40}$$

$\rangle\rangle$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема TVI.10. *Полный четырехвершинник обладает следующими свойствами:*

1. *На каждой диагонали имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат диагональные точки, а другой парой — точки пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку;*
2. *На каждой стороне имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат вершины, а другая образована диагональной точкой и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки;*
3. *Через каждую диагональную точку проходит гармоническая четверка прямых, в которой одной парой служат противоположные стороны, а другой — диагонали.*

В заключение этого раздела докажем полезную теорему:

Теорема TVI.11. *Пусть C - середина отрезка $[AB]$. Тогда четверка точек этой прямой A, B, C, D_∞ является гармонической:*

$$(AB, CD_\infty) = -1. \tag{VI.41}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Возьмем репер $\Re\{A, D_\infty, B\}$ на прямой (AB), т.е., положим: $A_0 = A, A_1 = D_\infty, E = B$. В этом репере указанные точки имеют координаты:

$$A(1,0); \quad D_\infty = (0,1); \quad B(1,1).$$

С другой стороны указанный репер реализует однородные аффинные координаты на прямой (AB). Поэтому координаты середины отрезка, C, равны:

$$C = (1, \frac{1}{2}).$$

Вычисляя сложное отношение (AB, CD) по формулам (TVI.4), (VI.19) найдем:

$$(AB, CD_\infty) = \frac{(AC)\cdot(BD_\infty)}{(AD_\infty)\cdot(BC)} \Longrightarrow$$

$$(AB, CD_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}} = -1.$$

Поскольку сложное отношение четырех точек прямой не зависит от выбора репера, теорема доказана. $\rangle\rangle$

Глава VII

Задачи проективной геометрии

VII.1 Задачи на проективный репер

Рассмотрим пример построения точки по ее проективным координатам относительно заданного репера на прямой. Пусть на прямой d задан репер $\Re\{A_0, A_1, E\}$ и заданы координаты точки M относительно этого репера $M(x^0, x^1)$. Требуется построить точку M.

Построение проводится по следующей схеме:

0). Построим произвольную прямую d и на ней отложим произвольные различные точки A_0, A_1, E. Тем самым мы осуществим нулевой пункт задачи - зададим прямую и проективный репер.

а). Построим произвольную точку O вне прямой d.

б). На прямой (OE) отложим произвольную точку E' и построим вектор $\vec{e} = \overrightarrow{OM'}$.

в). На прямых (OA_0) и (OA_1) отложим векторы $\vec{a}_0$ и $\vec{a}_1$ так, чтобы: $\vec{e} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$.

г). Построим вектор $\vec{m}$ по его заданным координатам (x^0, x^1) в векторном базисе $\{\vec{a}_0 , \vec{a}_1 \}$.

д). Построим точку $M' | \overrightarrow{OM'} = \vec{m}$ и проведем прямую (OM'). Пересечение этой прямой с прямой d и будет давать искомую точку M: $M = (OM) \cap d$.

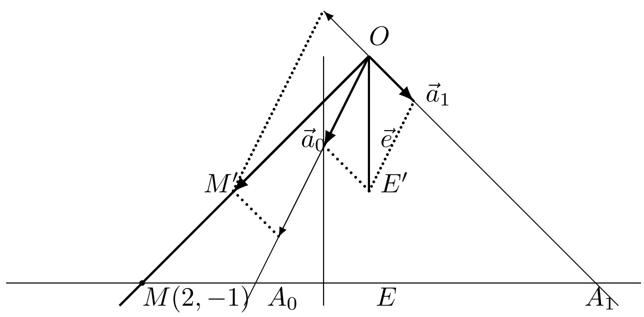


Рис.VII.26. *Пример построения точки M по ее проективным координатам (-2,1) относительно проективного репера прямой*

Пример ПVII.1. *Описанную программу реализуем на примере. Пусть на прямой d дан проективный репер $\Re\{A_0, A_1, E\}$, в котором задана своими координатами точка M. На Рис.VII.26 приведенная выше программа реализована на примере $M(2, -1)$.*

Пример ПVII.2. *На расширенной прямой $\overline{d}$ дан репер $\Re\{A_0, A_1, E_\infty\}$. Найти координаты середины отрезка $[A_0 A_1]$ в этом репере.*

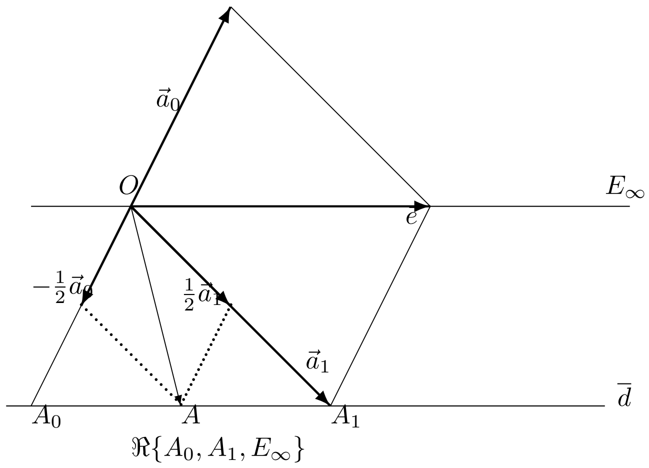


Рис.VII.27. *К нахождению координат середины отрезка*

<u>Решение</u>

Построим произвольную прямую $\overline{d}$ и на ней две различные точки A_0 и A_1 (см. Рис.VII.27). Вне прямой возьмем произвольную точку O и построим прямую, проходящую через эту точку параллельно прямой $\overline{d}$. Эта прямая является образом несобственной единичной точки E_∞. Для построения согласованного базиса отложим из точки O векторы $\vec{a}_0 = -\overrightarrow{OA_0}$ и $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$. Тогда по правилу треугольника:

$$\vec{a}_0 + \vec{a}_1 = -\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} =$$

$$= \overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_0A_1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_0 + \vec{a}_1 = \vec{e}.$$

Пусть A - середина отрезка $[A_0A_1]$. Прямые, проходящие через A параллельно базисным векторам делят пополам стороны OA_0 и OA_1 треугольника OA_0A_1, так как являются его средними линиями. Следовательно,

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \Longrightarrow A(-1, 1).$$

VII.2 Задачи на теорему Дезарга и сложное отношение

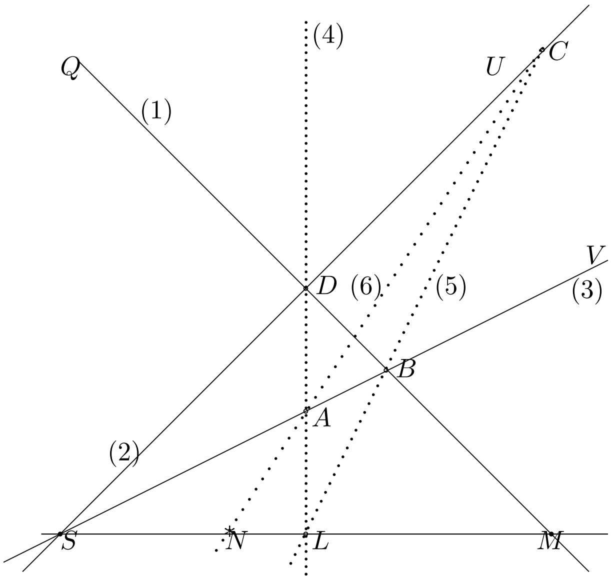


Рис.VII.28. *Построение точки, гармонически сопряженной трем заданным*

Пример ПVII.3. *На прямой d построить точку N, гармонически сопряженную трем заданным точкам S, L, M.*

Решение

Проведем прямую d и возьмем на ней 3 различные точки S, L, M (см. Рис.VII.28). Для построения точки N, гармонически сопряженной точкам S, L, M:

1. Через точку M проводим произвольную прямую (MQ) — (1);
2. Через точку S проводим произвольную прямую (SU) — (2);
3. Обозначим: $D = (SU) \cap (MQ)$;
4. Через точку S проведем еще одну произвольную прямую (SV) — (3);
5. Обозначим: $B = (SV) \cap (MQ)$;
6. Проведем прямую (LD) — (4);
7. Обозначим: $A = (LD) \cap (SV)$;
8. Проведем прямую (LB) — (5);
9. Обозначим: $C = (LB) \cap (SU)$;
10. Проведем прямую (CA) — (6);
11. Обозначим: $N = (CA) \cap \overline{d}$. N - искомая точка.

Построение параллельных прямых

При решении задач на геометрические построения на плоскости с помощью теоремы Дезарга необходимо учесть следующие обстоятельства:

- По определению односторонней линейки с ее помощью можно провести отрезок неограниченной длины, проходящий через данную точку.
- Две прямые a и b на проективной плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их несобственные точки совпадают, т.е., когда они пересекаются в несобственной точке.

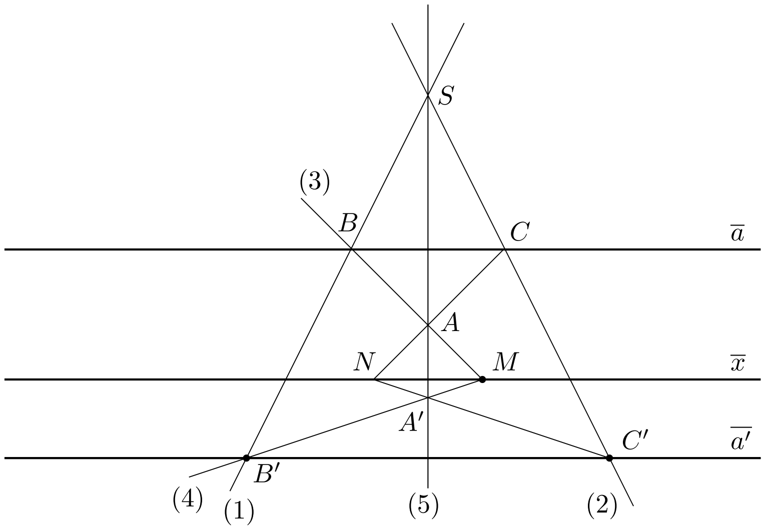


Рис.VII.29. *К построению прямой, параллельной двум заданным прямым*

- Вследствие теоремы TVI.5 на проективной плоскости серединой отрезка $[AB]$ является точка M такая, что $(AB, MD_\infty) = -1$, где D_∞ — несобственная точка прямой (AB).

Пример ПVII.4. *С помощью одной односторонней линейки через данную точку M провести прямую, параллельную двум заданным прямым a и a'.*

Решение

Проведем параллельные прямые a и a' и возьмем точку M, не лежащую на этих прямых (см. Рис.VII.29). Пусть $\overline{a}$ и $\overline{a}'$ - соответствующие расширенные прямые. Эти прямые пересекаются в несобственной точке D_∞. Искомая прямая должна пересекаться с данными прямыми в этой же точке. Следовательно, необходимо построить прямую (MD_∞), проходящую через заданную точку M и недоступную точку D_∞.

Для построения этой прямой воспользуемся теоремой Дезарга. Мы имеем три прямые, пересекающиеся в одной, несобственной точке плоскости. Следовательно, для решения задачи нам достаточно построить любые два дезарговых треугольника так, чтобы две их соответствующие стороны лежали на параллельных прямых.

Для этого (см. Рис.VII.29):

1. Возьмем в качестве центра перспективы любую точку S, не лежащую на прямых $\overline{a}$ и $\overline{a}'$;
2. Проведем две произвольные прямые, проходящие через точку S, не проходящие через точку M и не параллельные прямым a и a' — (1) и (2);
3. Обозначим: $B = (1) \cap \overline(a)$, $C = (2) \cap \overline{a}$, $B' = (1) \cap \overline{a}'$, $C' = (2) \cap \overline{a}'$;
4. Проведем прямые (BM) — (3) и $(B'M)$ — (4);
5. Проведем через точку S любую третью прямую — (5), не проходящую через точку M и не параллельную прямым a и a';
6. Обозначим: $A = (BM) \cap (5)$ и $A' = (B'M') \cap (5)$;
7. Проводим прямые (CA) и $(C'A')$. Ясно, что ABC и $A'B'C'$ - дезарговы треугольники;
8. Обозначим: $N = (CA) \cap (C'A')$;

9. Проведем прямую (MN).

(MN) — искомая прямая. Действительно, по теореме Дезарга точки $M = (AB) \cap (A'B')$, $N = (AC) \cap (A'C')$ и $D_\infty = (BC) \cap (B'C')$, являющиеся точками пересечения продолжений соответствующих сторон дезарговых треугольников ABC и $A'B'C'$, лежат на одной прямой, — оси перспективы. Таким образом, прямая (MN) проходит и через точку D_∞.

VII.3 Построение точки по ее координатам в заданном репере на плоскости

Для построения точки M по ее координатам (x^0, x^1, x^2) в заданном проективном репере $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ поступаем по следующей схеме (см. Рис.VII.30):

0). Нулевым пунктом программы строим произвольный треугольник $\Delta A_0A_1A_2$ и отмечаем произвольную точку E, не принадлежащую ни одной стороне треугольника. Тем самым мы задали проективный репер на плоскости $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$.

а). Строим проекции единичной точки $E : E_i$, проводя прямые через соответствующие вершины реперного треугольника и точку E до пересечения их с противоположными сторонами реперного треугольника $\Delta A_0A_1A_2$.

б). На любых двух указанных прямых, например, (A_0E) и (A_2E) откладываем произвольные точки, M_0' и M_2', соответственно.

в). Откладываем векторы $\vec{e}_0 = \overrightarrow{A_0M_0'}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_2M_2'}$ и разлагаем их по направляющим векторам пар прямых, проходящих через соответствующие вершины, A_0 и A_2. В результате получаем две пары базисных векторов: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ и $\{\vec{a'}_0, \vec{a'}_1\}$.

г). На прямой (A_0A_1) в проективном репере $\Re_2\{A_0, A_1, E_2\}$, порожденном пучком прямых $\mathcal{P}(A_2)$ и согласованным базисом $\{\vec{a'}_0, \vec{a'}_1\}$ строим точку M_2 с координатами (x^0, x^1).

д). На прямой (A_1A_2) в проективном репере $\Re_2\{A_1, A_2, E_0\}$, порожденном пучком прямых $\mathcal{P}(A_0)$ и согласованным базисом $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ строим точку M_0 с координатами (x^1, x^2).

е). Проводим прямые (A_2M_2) и (A_0M_0) до их пересечения. Точка пересечения этих прямых и является искомой точкой $M(x^0, x^1, x^2)$:
$$M = (A_0M_0) \cap (A_2M_2).$$

VII.4 Построение сечения треугольной призмы

Пример ПVII.5. *Дано изображение треугольной призмы $ABCA'B'C'$ и три точки сечения ее плоскостью на боковых гранях, P, Q, R, (см. Рис.VII.31). Требуется построить сечение, проходящее через эти точки.*

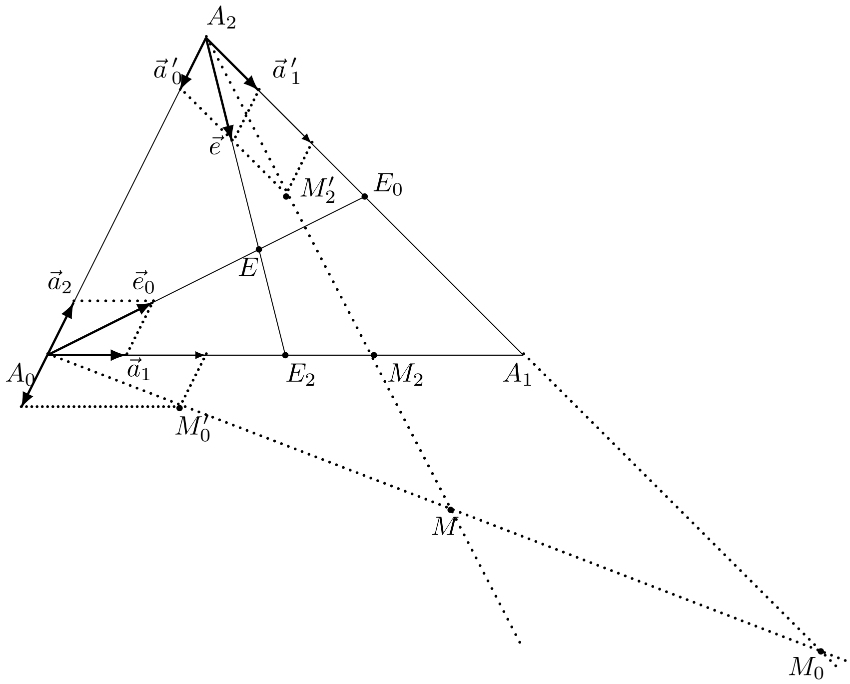
<u>**Решение**</u>

В расширенном евклидовом пространстве $\overline{\mathcal{E}_3}$ боковые ребра призмы $(AA'), (BB'), (CC')$ пересекаются в несобственной точке S_∞. В проектировании из этой точки образы точек P, Q, R на плоскость проектирования $A'B'C'$ получаются параллельным проектированием.

1. Через точки P, Q, R проводим прямые, параллельные ребрам призмы до пересечения их с плоскостью основания;

2. Получаем образы точек сечения: P', Q', R';

3. Строим треугольники ΔPQR и $\Delta P'Q'R'$. Это — дезарговы треугольники, так как прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в точке S_∞;



$\Re\{A_0, A_1, A_2, E\}$

Рис.VII.30. *Построение точки M по ее проективным координатам (1,2,2) в проективном репере на расширенной плоскости*

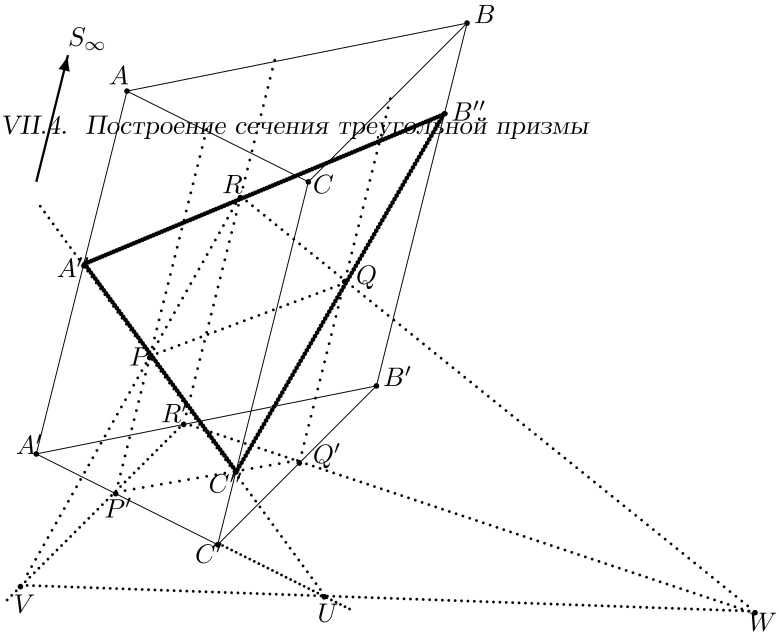


Рис.VII.31. *Построение сечения $A''B''C''$ треугольной призмы*

4. Продолжаем пары соответствующих сторон дезарговых треугольников: (RQ), $(R'Q')$ и (RP), $(R'P')$ и находим их пересечения:
$$V = (RP) \cap (R'P') \qquad W = (RQ) \cap (R'Q');$$
5. Проводим прямую $s = (VW)$ — ось перспективы. Прямая s является прямой пересечения плоскости основания призмы $(A'B'C')$ и плоскости сечения (ABC) :
$$s = (ABC) \cap (A'B'C');$$
6. Продолжаем сторону основания призмы, например, $(A'C')$ до ее пересечения с осью перспективы s и получаем точку U :
$$U = (A'C') \cap s;$$
7. Через точку U и точку P на соответствующей грани проводим прямую (UP). Эта прямая лежит одновременно в плоскости сечения и плоскости грани, которой принадлежит заданная точка сечения P. (Построение остальных прямых сечения можно провести аналогично, но мы поступим проще);
8. Через точку $A'' = (UP) \cap (A'A)$ и точку R проводим прямую сечения $A''R$;
9. Через точку $C'' = (UP) \cap (C'C)$ и точку Q проводим прямую $(C''Q)$.

Заметим, что при правильном построении точки пересечения $B'' = (A''R) \cap (B'B)$ и $B'' = (C''Q) \cap (B'B)$ должны совпасть.

Глава VIII

Дифференциальная геометрия кривых

VIII.1 Соприкасающаяся плоскость

Определение OVIII.1. *Соприкасающейся плоскостью кривой линии называется предельное положение плоскости, проходящей через три неограниченно сближающиеся точки этой линии.*

Если уравнение соприкасающейся плоскости кривой

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

в ее точке

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$$

имеет вид

$$\left(\vec{N} \cdot \vec{r}\right) + D = 0,$$

то согласно общей теории соприкосновения должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\vec{N} \cdot \vec{r}(t)\right) + D\right)_{t=t_0} &= 0\,;\\
\frac{d}{dt}\left(\left(\vec{N} \cdot \vec{r}(t)\right) + D\right)_{t=t_0} &= 0\,;\\
\frac{d^2}{dt^2}\left(\left(\vec{N} \cdot \vec{r}(t)\right) + D\right)_{t=t_0} &= 0.
\end{aligned}$$

Произведя дифференцирование и подстановку, получим три равенства:

$$\left(\vec{N} \cdot \vec{r}_0\right) + D = 0, \tag{VIII.1}$$

$$\left(\vec{N} \cdot \dot{\vec{r}}_0\right) = 0, \tag{VIII.2}$$

$$\left(\vec{N} \cdot \ddot{\vec{r}}_0\right) = 0. \tag{VIII.3}$$

Первое из них показывает, что соприкасающаяся плоскость проходит через точку прикосновения, что совершенно очевидно.

Второе говорит, что вектор производной лежит в соприкасающейся плоскости. Если принять во внимание, что соприкасающаяся плоскость проходит через точку A_0, то из этого следует: *соприкасающаяся плоскость кривой в данной ее точке проходит через касательную прямую, определенную для той же точки.*

Действительно, прямая A_0A_1 стремилась занять положение касательной в то время, как содержащая ее плоскость $A_0A_1A_2$ принимала положение соприкасающейся плоскости. В силу непрерывности очевидно, что прямая и плоскость и в пределе должны были сохранить соединенное положение.

Равенство (VIII.3) не может быть истолковано геометрически, так как для такого истолкования нет вектора второй производной. Однако, выраженный им факт весьма важен.

При любой параметризации кривой вектор второй производной радиуса-вектора кривой расположен в ее соприкасающейся плоскости .

Соотношения (VIII.2) и (VIII.3) позволяют найти нормальный вектор соприкасающейся плоскости во всякой точке кривой, в которой векторы первой и второй производной неколлинеарны. Его можно положить равным их векторному произведению.

$$\vec{B} = \left[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right]. \tag{VIII.4}$$

Вследствие этого уравнение соприкасающейся плоскости будет иметь вид

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}_0,\ \ddot{\vec{r}}_0\right) = 0, \tag{VIII.5}$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0; \tag{VIII.6}$$

уравнение теряет смысл для тех точек кривой, в которых

$$\left[\dot{\vec{r}}_0 \cdot \ddot{\vec{r}}_0\right] = 0. \tag{VIII.7}$$

Такие точки мы будем называть точками *спрямления*. Будем считать, что соприкасающаяся плоскость в этих точках не определена и в дальнейшем исключать их из рассмотрения, наравне с особыми точками кривой.

VIII.2 Основной трехгранник

Определение OVIII.2. *Нормалью пространственной кривой называется всякая прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку прикосновения.*

Таким образом в каждой своей точке кривая имеет бесчисленное множество нормалей. Все они расположены в одной плоскости, перпендикулярной касательной прямой, эту плоскость называют *нормальной плоскостью* кривой.

Среди нормалей выделяют две.

1. *Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью.*
1. *Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется главной бинормалью.*

Касательная, главная нормаль и бинормаль определяют в каждой точке кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется *сопровождающим, основным* или *натуральным трехгранником* кривой. Гранями основного трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости:

1. *соприкасающаяся плоскость*, содержащая касательную и главную нормаль.
2. *нормальная плоскость*, содержащая главную нормаль и бинормаль.
3. третья плоскость, содержащая бинормаль и касательную, называется *спрямляющей плоскостью.*

Если точка кривой задана, то для определения граней и ребер основного трехгранника нужно уметь вычислять их направляющие векторы. Направляющий вектор касательной равен первой производной

$$\vec{T} = \dot{\vec{r}}\ . \tag{VIII.8}$$

Направляющий вектор бинормали равен векторному произведению векторов первой и второй производной

$$\vec{B} = \left[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right]. \tag{VIII.9}$$

Направляющий вектор главной нормали перпендикулярен вектору касательной и вектору бинормали. Поэтому его можно положить равным их векторному произведению

$$\vec{N} = [\,\dot{\vec{r}}\,[\,\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,]\,]. \tag{VIII.10}$$

VIII.3 Натуральная параметризация кривой

Выберем на кривой, параметризованной с помощью произвольного параметра t, некоторую точку A_0, соответствующую значению параметра $t = t_0$, и назовем ее *начальной точкой*. Длина дуги, имеющей начало в точке A_0 и конец в произвольной точке кривой A, определится формулой

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} |\,\dot{\vec{r}}\,|dt. \tag{VIII.11}$$

Она определяет s как однозначную и непрерывную функцию параметра t.

Так как производная этой функции

$$\frac{ds}{dt} = |\,\dot{\vec{r}}\,(t)|$$

положительна во всех не особых точках кривой, то эта функция монотонно возрастает при возрастании значения параметра. Отсюда следует, что между точками кривой и значениями длины дуги, описываемой от начальной точки, можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие. Заметим, что точкам кривой, расположенным по разные стороны начальной точки, соответствуют различные значения параметра, так как при $t < t_0$ значение s, определяемое интегралом (VIII.11), будет отрицательным, а при $t > t_0$ оно будет положительным.

Ввиду того что точки кривой и значения длины дуги s находятся во взаимно однозначном и непрерывном соответствии, s можно принять за новый параметр. Этот параметр, как мы увидим ниже, особенно удобен для изучения кривой по ее уравнению и называется *натуральным параметром кривой*.

Итак, значение натурального параметра для некоторой точки кривой равно по величине длине дуги кривой между некоторой точкой, принятой за начальную, и данной точкой, знак же его определяется в зависимости от выбора направления движения по кривой, условно принятого за положительное.

VIII.4 Единичные векторы основного трехгранника

Основной трехгранник позволяет связать с каждой точкой кривой прямоугольную систему координат, оси которой совпадают с *касательной, главной нормалью и бинормалью*. Чтобы определить их ориентацию введем единичные векторы, направленные по этим осям в положительную сторону.

Предположим, что кривая отнесена к натуральному параметру.

1. Единичный вектор касательной $\vec{\tau}$ определим так, чтобы он совпадал с первой производной радиуса-вектора по натуральному параметру

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,'. \tag{VIII.12}$$

2. Единичный вектор главной нормали $\vec{\nu}$ определим так, чтобы его ориентация совпадала с ориентацией вектора второй производной по натуральному параметру

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|}. \tag{VIII.13}$$

3. Единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$ определим так, чтобы тройка векторов $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ была правой Рис.VIII.32
.

Так как векторы основного трехгранника единичны и ортогональны, то их скалярные квадраты равны единице, а их произведение между собой равно нулю.

$$\vec{\tau}^{\,2} = \vec{\nu}^{\,2} = \vec{\beta}^{\,2} = 1;$$

$$(\,\vec{\tau}\,\vec{\nu}\,) = (\,\vec{\nu}\,\vec{\beta}\,) = (\,\vec{\beta}\,\vec{\tau}\,) = 0. \tag{VIII.14}$$

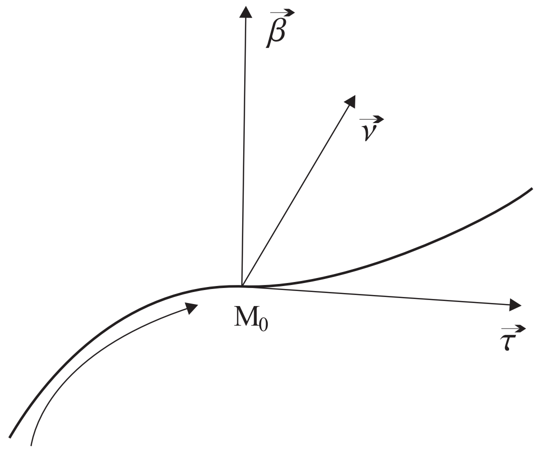


Рис.VIII.32. *К единичным векторам основного трехгранника*

Векторные произведения двух различных векторов тройки, следующие друг за другом в круговом порядке; касательная - главная нормаль - бинормаль - касательная, равны третьему вектору тройки, так как это имеет место для координатных векторов всякой правой системы координат

$$[\vec\tau\,\vec\nu\,] = \beta; \quad [\vec\nu\,\vec\beta\,] = \tau; \quad [\vec\beta\,\vec\tau\,] = \nu. \tag{VIII.15}$$

VIII.5 Формулы Френе - Серре

Векторы основной тройки меняются при движении точки по кривой. Чтобы охарактеризовать это изменение, нужно уметь вычислять их производные по натуральному параметру. Особенно удобно знать разложения этих производных по векторам основной тройки.

Проще всего получить производную вектора касательной, так как

$$\frac{d\vec\tau}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec r\,') = \vec r\,'',$$

а вектор второй производной направлен по главной нормали, ориентирован так же, как и вектор $\vec\nu$. Поэтому

$$\frac{d\vec\tau}{ds} = k\vec\nu, \tag{VIII.16}$$

где k - некоторая положительная величина, зависящая от s.

Будем искать теперь разложение производной вектора бинормали. Этот вектор определим как векторное произведение $\vec\tau$ и $\vec\nu$ и будем дифференцировать это соотношение, принимая во внимание (VIII.16)

$$\frac{d\vec\beta}{ds} = \left[\frac{d\vec\tau}{ds}\cdot\vec\nu\right] + \left[\vec\tau\cdot\frac{d\vec\nu}{ds}\right] = k[\vec\nu\,\vec\nu\,] + \left[\vec\tau\cdot\frac{d\vec\nu}{ds}\right] = \left[\vec\tau\cdot\frac{d\vec\nu}{ds}\right].$$

Так как векторное произведение перпендикулярно каждому из своих сомножителей, то полученный результат показывает, что $\dfrac{d\vec\beta}{ds}$ перпендикулярно $\vec\tau$.

С другой стороны, $\vec\beta$ — единичный вектор, поэтому его производная перпендикулярна его самому.

Но будучи перпендикулярна касательной и бинормали, $\dfrac{d\vec\beta}{ds}$ должна быть направлена по главной нормали. Обозначая коэффициент пропорциональности - κ, получим

$$\frac{d\vec\beta}{ds} = -\kappa\vec\nu. \tag{VIII.17}$$

Наконец, вектор главной нормали определим, перемножая векторно $\vec\beta$ и $\vec\tau$ и дифференцируя это произведение, принимая во внимание (VIII.16) и (VIII.17).

$$\frac{d\vec\nu}{ds} = \left[\frac{d\vec\beta}{ds}\cdot\vec\tau\right] + \left[\vec\beta\cdot\frac{d\vec\tau}{ds}\right] = -\kappa[\vec\nu\,\vec\tau\,] + k[\vec\beta\,\vec\nu\,].$$

Наконец, вектор главной нормали определим, перемножая векторно $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$ и дифференцируя это произведение, принимая во внимание (VIII.16) и (VIII.17).

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\beta}}{ds} \cdot \vec{\tau} \right] + \left[\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right] = -\kappa \left[\vec{\nu} \cdot \vec{\tau} \right] + k \left[\vec{\beta}\ \vec{\nu} \right].$$

Но вследствие формул (VIII.15) векторные произведения в правой части можно заменить векторами основной тройки, следовательно:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\kappa\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}. \tag{VIII.18}$$

Объединяя предыдущие результаты, получим систему формул, называемых формулами Серре - Френе

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}; \tag{VIII.19}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}; \tag{VIII.20}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}. \tag{VIII.21}$$

Глава IX

Задачи дифференциальной геометрии кривых

Основные формулы

$$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{u}) = \lambda\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\vec{u}, \tag{IX.1}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\vec{v}) = \vec{u}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\vec{r}, \tag{IX.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}\right] = \left[\vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}\right]. \tag{IX.3}$$

Полезна также формула Эйлера:

$$|\left[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\right]|^2 + |\left(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\right)|^2 \equiv 1.$$

Пример ПIX.1. *Вычислить кривизну и кручение кривой:*

$$\vec{r} = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t + \vec{c},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - не коллинеарные векторы.

<u>Решение</u>

Дифференцируя, найдем:

$$\dot{\vec{r}} = -\vec{a}\sin t + \vec{b}\cos t; \quad \ddot{\vec{r}} = -\vec{a}\cos t - \vec{b}\sin t; \quad \dddot{\vec{r}} = \vec{a}\sin t - \vec{b}\cos t.$$

Таким образом, найдем:

$$[\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}] = [\vec{a}\cdot\vec{b}]; \qquad (\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = 0.$$

Таким образом, кручение кривой равно нулю, стало быть, кривая - плоская. Вычисляя кривизну кривой по формуле:

$$k = \frac{|[\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}]|}{|\,\dot{\vec{r}}\,|^3},$$

найдем:

$$|\,\dot{\vec{r}}\,| = \sqrt{a^2\sin^2 t - 2\left(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\right)\sin t\cos t + b^2\cos^2 t} \Rightarrow$$

$$k = \frac{|[\vec a \cdot \vec b]|}{\left(\sqrt{a^2 \sin^2 t - 2(\vec a\, \vec b) \sin t \cos t + b^2 \cos^2 t}\right)^3}.$$

Пример ПIX.2. *Доказать, что годограф функции*

$$\vec r = \vec a \cos t + \vec b \sin t + \vec c$$

есть эллипс, расположенный в плоскости, проходящей через точку $M_0(\vec r_0)|\vec r_0 = \vec c$ *и содержащей векторы* $\vec a$ *и* $\vec b$, *если эти векторы не коллинеарны между собой.*

Решение

Тот факт, что эта линия лежит в плоскости, мы доказали выше. Введем в указанной плоскости $\Pi(M_0; \vec a, \vec b)$ систему декартовых координат xOy с началом в точке $M_0(\vec r_0)$: Тогда:

$$\vec r - \vec r_0 = \vec a \cos t + \vec b \sin t.$$

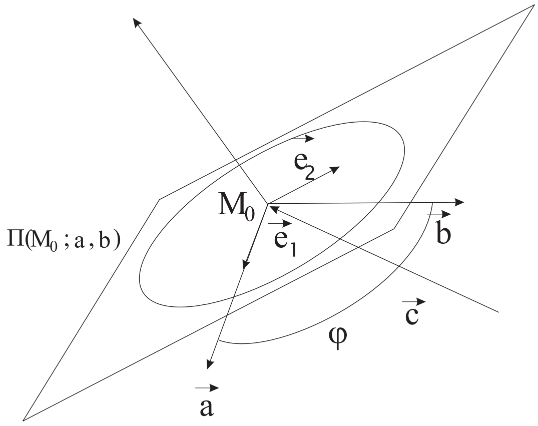


Рис.IX.33. *К задаче ПIX.2*

Выберем в качестве орта первой координатной оси:

$$\vec e_1 = \frac{\vec a}{|\vec a|},$$

а в качестве второго орта - вектор, лежащий в плоскости $\Pi(M_0; \vec a, \vec b)$ и ортогональный вектору $\vec e_1$ (см. Рис.IX.33):

$$\vec e_2 = \frac{[\vec a\ [\vec b\ \vec a]]}{|[\vec a\ [\vec b\ \vec a]]|}.$$

Вводя теперь координаты точки M на плоскости:

$$\vec r - \vec r_0 = \xi \vec e_1 + \eta \vec e_2 = \vec a \cos t + \vec b \sin t,$$

и приравнивая коэффициенты при *линейно - независимых векторах* $\vec a$ и $\vec b$ в правой и левой частях этого векторного равенства, найдем координаты точки кривой:

$$\xi = |\vec a| \cos t + \frac{(\vec a\ \vec b)}{|\vec a|} \sin t; \qquad \eta = \frac{|[\vec a\ \vec b]|}{|\vec a|} \sin t.$$

Учитывая, что

$$|[\vec a\ \vec b]| = ab \sin \phi; \qquad (\vec a\ \vec b) = ab \cos \phi,$$

где ϕ - угол между векторами $\vec a$ и $\vec b$, а $a = |\vec a|$ и $b = |\vec b|$ - длины этих векторов, получим параметрические уравнения кривой:

$$\xi = a \cos t + b \sin \phi \sin t;$$
$$\eta = b \cos \phi \sin t,$$

где ξ и η - прямоугольные координаты плоскости $\Pi(M_0, \vec a, \vec b)$. Разрешая эти уравнения относительно $\cos t$ и $\sin t$, найдем:

$$\sin t = \frac{\eta}{b \sin \phi}; \qquad \cos t = \frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{a} \operatorname{ctg} \phi. \tag{IX.4}$$

возводя в квадрат обе части соотношений (IX.4) и складывая, получим:

$$\frac{(\xi \sin\phi - \eta\cos\phi)^2}{a^2\sin^2\phi} + \frac{\eta^2}{b^2\sin^2\phi} = 1.$$

Этой кривой *второго порядка* на плоскости $\Pi(M_0; \vec{a}, \vec{b})$ соответствует положительный определитель квадратичной формы:

$$\det(B) = \left(\frac{1}{ab\sin\phi}\right)^2;$$

поэтому кривая является эллипсом. При $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ полуоси эллипса направлены вдоль осей ξ и η и равны $a = |\vec{a}|,\ b = |\vec{b}|$.

Пример ПIX.3. *Составить уравнение соприкасающейся плоскости конической винтовой линии*

$$\vec{r}(t) = (t\cos t, -t\sin t, at) \tag{IX.5}$$

в начале координат.

Решение

Уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0, \tag{IX.6}$$

Начало координат $(0, 0, 0)$ соответствует значению $t = 0$. Вычисляя производные радиуса-вектора (IX.5), получим:

$$\dot{\vec{r}}= (\cos t - \sin t, -\sin t - t\cos t, a); \qquad \ddot{\vec{r}}= (-2\sin t - t\cos t, -2\cos t + t\sin t, 0).$$

Таким образом, в начале координат:

$$\dot{\vec{r}}\,(0) = (1, 0, a); \qquad \ddot{\vec{r}}\,(0) = (0, -2, 0).)$$

Записывая уравнение соприкасающейся плоскости (IX.6):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

найдем общее уравнение:

$$-ax + z = 0.$$

Пример ПIX.4. *Найти соприкасающуюся плоскость кривой пересечения двух поверхностей:*

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &: \ \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Sigma_2 &: \ \Psi(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

В частности найти соприкасающуюся плоскость кривой пересечения сферы S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра C: $x^2 + y^2 = R^2$, не прибегая к параметризации этой кривой.

Решение

Касательный вектор, $\vec{T}$, кривой пересечения равен:

$$\vec{T} = [\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi],$$

где ∇F - так называемый вектор *градиента функции* F:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Предположим, что кривая $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ параметризована некоторым параметром t. Тогда

$$\dot{\vec{r}} = \lambda \vec{T}.$$

Вторая производная радиуса-вектора тогда равна:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d\,\dot{\vec{r}}}{dt} = \lambda \frac{d\vec{T}}{dt} = \lambda\left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) = \lambda^2(\vec{T}\vec{\nabla})\vec{T}.$$

Таким образом, нормальный вектор соприкасающейся плоскости, т.е., вектор бинормали равен[1]:

$$\vec{B} = [\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}] = [\vec{T} \cdot (\vec{T}\vec{\nabla})\vec{T}].$$

Обратимся к конкретному примеру. Вычисляя, найдем (опуская несущественные множители) :

$$\vec{\nabla}\Phi = (x, y, z); \qquad \vec{\nabla}\Psi = (x, y, 0).$$

$$\vec{T} = [\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi] = (-yz, xz, 0) \to (-y, x, 0).$$

Таким образом:

$$(\vec{T}\vec{\nabla}) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$(\vec{T}\vec{\nabla})\vec{T} = -(x, y, 0).$$

Окончательно найдем:

$$[\vec{T} \cdot (\vec{T}\vec{\nabla})\vec{T}] = -(0, 0, x^2 + y^2) = -R^2(0, 0, 1) \Longrightarrow$$

$$\vec{\beta} = (0, 0, 1).$$

Это означает, что соприкасающаяся плоскость будет параллельна координатной плоскости XOY в любой точке кривой. Найдя любую точку кривой Γ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \qquad x^2 + y^2 = R^2 \Longrightarrow z = 0,$$

приходим к тому, что эта плоскость и является в нашем случае соприкасающейся:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\beta}) = (x - x_0) \cdot 0 + (y - y_0) \cdot 0 + z \cdot 1 = 0 \Longrightarrow z = 0.$$

Пример ПIX.5. *Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой:*

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3) \tag{IX.7}$$

в начале координат.

<u>Решение</u>

[1] множители вида λ /мы отбрасываем.

Найдем производные радиуса-вектора (IX.7):

$$\dot{\vec{r}} = (1, 2t, 3t^2); \qquad \ddot{\vec{r}} = (0, 2, 6t).$$

Началу координат соответствует значение параметра $t = 0$. Таким образом, в начале координат:

$$\dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, 0); \qquad \ddot{\vec{r}} = (0, 2, 0).$$

Таким образом, единичные векторы касательной, $\vec{\tau}$, и бинормали, $\vec{\beta}$, равны :

$$\vec{T} = \vec{\tau} = \dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, 0);$$

$$\vec{B} = [\dot{\vec{r}}(0) \cdot \ddot{\vec{r}}(0)] = (0, 0, 2) \Longrightarrow \vec{\beta} = (0, 0, 1).$$

Вектор главной нормали, $\vec{\nu}$, равен:

$$\vec{\nu} = [\vec{\beta}\, \vec{\nu}] = (1, 0, 0).$$

Итак, в начале координат основные единичные векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ совпадают с осями координат.

IX.1 Формулы Френе - Серре

Основные формулы

Формулы Френе-Серре имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}\,' &= k\vec{\nu}; \\ \vec{\nu}\,' &= -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}; \\ \vec{\beta}\,' &= -\kappa\vec{\nu}. \end{aligned} \tag{IX.8}$$

Пример ПIX.6. *Параметризовать винтовую линию с помощью натурального параметра и найти вектор ее главной нормали.*

Решение

Цилиндрическая винтовая линия описывается параметрическими уравнениями:

$$\vec{r} = a\vec{e}(\varphi) + b\varphi\vec{k} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, b\varphi).$$

Вычисляя первую производную этого вектора, найдем:

$$\dot{\vec{r}} = a\vec{e}_1(\varphi) + b\vec{k} = (-a\sin\varphi, a\cos\varphi, b).$$

Таким образом, длина дуги равна:

$$s = \int\limits_0^t |\dot{\vec{r}}| dt = \int\limits_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отсюда найдем:

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом, подставляя эту связь в уравнение винтовой линии, осуществим ее натуральную параметризацию:

$$\vec{r} = a\vec{e}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\vec{k}.$$

Как известно, при этом единичный вектор главной нормали

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''\,|},$$

причем

$$k = |\vec{r}''\,| -$$

- кривизна кривой. Таким образом, найдем :

$$\vec{r}'' = -\frac{a}{a^2+b^2}\vec{e}(\varphi),$$

$$|\vec{r}''\,| = k = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\vec{\nu} = \vec{e}(\varphi).$$

Пример ПIX.7. *Найти векторы основного трехгранника и составить формулы Френе-Серре для цилиндрической винтовой линии.*

Решение

На основании решения примера ПIX.6, имеем

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,' = \frac{a\vec{e}(\varphi) + b\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''\,|} = -\vec{e}(\varphi)$$

$$\vec{\beta} = [\,\vec{\tau}\;\vec{\nu}\,] = \frac{a\vec{k} - b\vec{e}(\varphi)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Коэффициент

$$k = |\vec{r}''\,| = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{IX.9}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{\beta}}{d\vec{\varphi}}\frac{d\vec{\varphi}}{ds} = \frac{b\vec{e}(\varphi)}{a^2+b^2} = -\kappa\vec{\nu},$$

откуда следует, что

$$\kappa = -\frac{b}{a^2+b^2}. \tag{IX.10}$$

Таким образом формулы Серре-Френе имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \frac{a}{a^2+b^2}\vec{\nu}, \\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} &= -\frac{a}{a^2+b^2}\vec{\tau} + \frac{b}{a^2+b^2}\vec{\beta}, \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} &= -\frac{b}{a^2+b^2}\vec{\nu}. \end{aligned}$$

IX.2 Кривизна и кручение кривой

Основные формулы

Кривизна кривой в данной точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся к данной точке:

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi}{\Delta S} = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|. \tag{IX.11}$$

Абсолютная величина кручения в данной точке кривой равна пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги:

$$|\kappa| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\psi}{\Delta s} = \left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right|. \tag{IX.12}$$

Если кривая задана в общей параметризации $\vec{r} = \vec{r}(b)$, то формулы для вычисления кривизны и кручения принимают вид:

$$k = \frac{\left| \left[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right] \right|}{| \dot{\vec{r}} |^3}, \tag{IX.13}$$

$$\kappa = \frac{\left(\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}} \right)}{\left| \left[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right] \right|^2}. \tag{IX.14}$$

В координатной записи выражение IX.13 и IX.14 принимают вид:

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}{(\dot{x}^{\,2} + \dot{y}^{\,2} + \dot{z}^{\,2})^{\frac{3}{2}}}. \tag{IX.15}$$

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}. \tag{IX.16}$$

Пример ПIX.8. *Вычислить кривизну кривой*

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t.$$

Решение

Для вычисления кривизны воспользуемся формулой IX.15

Имеем

$$\dot{x} = -3\cos^2 t \sin t, \quad \dot{y} = 3\sin^2 t \cos t, \quad \dot{z} = -2\sin 2t;$$

$$\ddot{x} = 6\sin^2 t \cos t - 3\cos^3 t, \quad \ddot{y} = 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t, \quad \ddot{z} = -4\cos 2t.$$

Проделав необходимые вычисления, получим

$$k = \frac{6}{25|\sin 2t|}.$$

Пример ПIX.9. *Показать, что кривая*

$$x = 1 + 3t + 2t^2, \quad y = 2 - 2t + 5t^2, \quad z = 1 - t^2$$

плоская, и найти уравнение плоскости, в которой расположен ее образ.

Решение

Подсчитывая производные, имеем

$$\dot{\vec{r}}\,(t) = (3 + 4t,\ -2 + 10t,\ -2t);$$
$$\ddot{\vec{r}}\,(t) = (4,\ 10,\ -2);$$
$$\dddot{\vec{r}}\,(t) = (0,\ 0,\ 0).$$

Поэтому кручение кривой

$$\kappa = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{[\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}]^2} = 0.$$

Как мы показали ранее, всякая кривая, кручение которой равно нулю, плоская. Чтобы непосредственно установить, что наша кривая плоская, вместе с тем определить уравнение плоскости, в которой лежит кривая, можно, подсчитывая уравнение ее соприкасающейся плоскости, обнаружить, что это уравнение не зависит от параметра t. Гораздо проще непосредственно исключить параметр t из уравнений, определяющих нашу кривую:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 3 & 2 \\ y - 2 & -2 & 5 \\ z - 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $2x + 3y + 19z - 27 = 0$.

Пример ПIX.10. *Доказать, что формулы Френе IX.8 можно записать в виде*

$$\dot{\vec{\tau}} = [\vec{\zeta}, \vec{\tau}]; \quad \dot{\vec{\nu}} = [\vec{\zeta}, \vec{\nu}]; \quad \dot{\vec{\beta}} = [\vec{\zeta}, \vec{\beta}].$$

Найти вектор $\vec{\zeta}$.

Решение

Разложим вектор $\vec{\zeta}$ по ортонормированному базису векторов сопровождающего трехгранника кривой:

$$\vec{\zeta} = a\vec{\tau} + b\vec{\nu} + c\vec{\beta}.$$

Имеем

$$[\vec{\zeta}, \vec{\tau}] = -b\vec{\beta} + d\vec{\nu} = k\vec{\nu},$$

откуда $b = 0$, $d = k$. Далее

$$[\vec{\zeta}, \vec{\nu}] = a\vec{\beta} - d\vec{\tau} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta},$$

откуда $a = \kappa$. Остается проверить последнюю формулу. Имеем

$$[\vec{\zeta}\,, \vec{\beta}] = [\kappa\vec{\tau} + k\vec{\beta}, \vec{\beta}] = \kappa[\vec{\tau}, \vec{\beta}] = -\kappa\vec{\nu}.$$

Итак

$$\vec{\zeta} = \kappa\vec{\tau} + k\vec{\beta}.$$

Вектор $\vec{\zeta}$ имеет простой кинематический смысл — это вектор угловой скорости вращения сопровождающего трехгранника при движении вдоль кривой (если под временем понимать длину дуги этой кривой).

Пример ПIX.11. *Найти выражение для кривизны кривой, заданной полярным уравнением:*

$$\vec{r} = \rho(\phi)\vec{e}(\varphi), \qquad \text{где } \vec{e}(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 0) - \text{круговая векторная функция.}$$

<u>Решение</u>

Принимая в качестве параметра t полярный угол: $t = \phi$, найдем:

$$\begin{aligned}
&\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}e(\varphi) + 2\rho\vec{e}(\varphi),\\
&\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho)\vec{e}(\varphi) + 2\dot{\rho}e_1(\varphi)\\
&\left[\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right] = (2\dot{\rho}^2 + \rho^2 - \rho\ddot{\rho})\vec{k},\\
&|\dot{\vec{r}}| = (\rho^2 + \dot{\rho}^{\,2})^{3/2},
\end{aligned}$$

откуда получим:

$$k = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^{\,2} - \rho\ddot{r}}{(\rho^2 - \dot{\rho}^{\,2})^{3/2}}.$$

IX.3 Натуральные уравнения кривой

Основные формулы

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то ее кривизна и кручение являются функциями этого параметра

$$k = k(s); \quad \kappa = \kappa(s). \tag{IX.17}$$

Система этих двух соотношений называется *натуральными уравнениями кривой*.

Пример ПIX.12. *Составить натуральные уравнения кривой*

$$x = ct, \quad y = \sqrt{2}c\ln t, \quad z = ct^{-1}.$$

<u>Решение</u>

Прежде всего найдем зависимость между параметром t и натуральном параметром s. Имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2\left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)dt^2 = \frac{c^2(t^2+1)^2}{t^4}dt^2,$$

т.е.

$$ds = \frac{c(t^2+1)}{t^2}dt.$$

Поэтому

$$s = c\int\limits_{t_0}^{t}\frac{t^2+1}{t^2}dt = c\left(t - \frac{1}{t}\right) - c\left(t_0 - \frac{1}{t_0}\right).$$

Полагая $t_0 = 1$, получим

$$s = c\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Из этого равенства нетрудно найти t как функцию s :

$$t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c}.$$

Уравнение кривой в натуральном параметре имеет вид:

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c}, \quad y = \sqrt{2}c \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2c}, \quad z = \frac{2c^2}{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}.$$

Вычисляя теперь кривизну и кручение данной кривой, как функции параметра s, найдем ее натуральные уравнения:

$$k = \kappa = \frac{c\sqrt{2}}{s^2 + 4c^2}.$$

Глава X

Дифференциальная геометрия поверхностей

X.1 Первая квадратичная форма поверхности

Предположим, что на поверхности задано некоторое семейство линий, зависящих от одного параметра. Будем называть это семейство *правильным* в некоторой области точек поверхности, если через каждую точку этой области проходит одна и только одна линия семейства.

Если на поверхности заданы два семейства линий, то мы будем говорить, что они образуют сеть в той области, в которой оба они правильны, причем, будем предполагать, что в этой области линии различных семейств не совпадают между собою и не касаются друг друга и пересекаются только в одной точке.

Предположим, что на поверхности задана сеть, удовлетворяющая всем этим условиям. Пусть линия одного семейства этой сети определяется значением параметра u, а линия другого семейства значением параметра v Так как через каждую точку области проходят вполне определенные линии каждого семейства, то всякой точке соответствуют вполне определенные значения параметров u и v. Вследствие этого *значения параметров u и v, определяющих кривые сети, пересекающиеся в данной точке поверхности, называются криволинейными координатами этой точки.* Сами эти линии и образованная ими сеть называются координатными.

Если на поверхности введены криволинейные координаты, то говорят также, что поверхность параметризована. В таком случае, всякой паре значений параметров u, и v, соответствует определенная точка поверхности. Значение радиуса-вектора этой точки вполне определяется заданием значений независимых переменных u, и v, и мы можем сказать, что векторная переменная $\vec{r}$ является функцией двух скалярных аргументов u, и v, и записать это так

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \tag{X.1}$$

Зависимость радиуса-вектора точки параметризованной поверхности от криволинейных координат этой точки называется параметрическим уравнением поверхности. Найдем параметрические уравнения некоторых поверхностей.

1. Пусть $\vec{r}_0$ есть радиус-вектор начала, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ координатные векторы декартовой системы координат плоскости. Обозначая через u и v, декартовы координаты, соответствующие этой системе, получим параметрическое уравнение плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}_u + \vec{b}_v. \tag{X.2}$$

2. Предположим теперь, что $\vec{r}_0$ есть радиус-вектор полюса, $\vec{i}$ есть единичный вектор, направленный по полярной оси, а $\vec{j}$ единичный вектор, перпендикулярный этой оси. Обозначив как обычно через и ϕ и ρ полярные координаты точки на плоскости, получим ее параметрическое уравнение в координатах

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \rho(\vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi)$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \rho\vec{e}(\phi). \tag{X.3}$$

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание общего характера. В анализе и при изложении элементов теории поверхностей часто задают поверхность уравнением

$$z = f(x, y). \tag{X.4}$$

Легко видеть, что это уравнение следует считать частным случаем параметрического. Действительно, принимая за параметры абсциссу и ординату точки поверхности, можем написать ее параметрическое уравнение в следующем виде

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y)). \tag{X.5}$$

В дальнейшем будем рассматривать только такие поверхности в параметрическом уравнении, которых функция $\vec{r}(u, v)$ имеет частные производные, по крайней мере, первых двух порядков. Предполагая это, решим задачу о нахождении *касательной прямой* поверхности.

Прямая касается поверхности, если она касается некоторой кривой, принадлежащей поверхности. Допустим, что поверхность задана параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \tag{X.6}$$

а принадлежащая ей кривая в свою очередь параметризована с помощью параметра t. В таком случае каждому значению этого параметра соответствует некоторая точка кривой, а ее положению на поверхности соответствуют в свою очередь определенные значения криволинейных координат u и v.

Таким образом, криволинейные координаты точек кривой, расположенные на поверхности, являются функциями параметра t. Соответствующую систему соотношений

$$u = u(t); \qquad v = v(t) \tag{X.7}$$

будем называть внутренними уравнениями кривой на поверхности. Внутренние уравнения вполне характеризуют кривую, если задано параметрическое уравнение поверхности, так как подстановка (X.7) и (X.6) приводит нас к уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), \tag{X.8}$$

являющемуся параметрическим уравнением данной линии. Касательный вектор этой кривой, а следовательно, и направляющий вектор прямой, касающейся поверхности, получим обычным приемом, дифференцируя радиус-вектор $\vec{r}$ по параметру t. Однако, при этом, примем во внимание, что в силу (X.8) $\vec{r}$ зависит от t через посредство аргументов u и v, получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\right) + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right). \tag{X.9}$$

Правая часть этого выражения представляет собою линейную комбинацию двух векторов, которые для краткости обозначают так

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \vec{r}_u; \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v \tag{X.10}$$

и называются *координатными векторами*, соответствующими той точке, криволинейные координаты которой подставляются при их вычислении. Легко видеть, что *координатные векторы есть векторы касательных к координатным линиям* Рис.X.34.

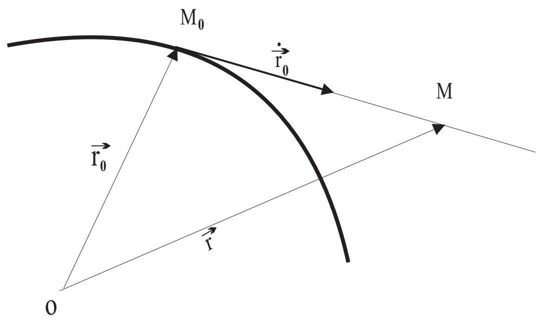


Рис.X.34. *Касательная прямая*

Таким образом, формула (X.10) показывает, что направляющий вектор всякой прямой, касающейся поверхности в данной точке, является линейной комбинацией координатных векторов, соответствующих этой точке, а его направление определяется отношением du и dv, т.е. дифференциалов криволинейных координат, соответствующих направлению кривой, которой касается данная прямая.

Так как все касательные векторы, соответствующие данной точке поверхности, выражаются линейно через координатные, то все они компланарны, следовательно, все прямые, касающиеся поверхности в данной точке, располагаются в одной плоскости — *касательной плоскости поверхности*.

Чтобы получить уравнение касательной плоскости, примем во внимание, что она содержит векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ и ее нормальный вектор им перпендикулярен. Поэтому этот вектор может быть положен равным

$$\vec{N} = [\vec{r}_u \vec{r}_v]. \tag{X.11}$$

Правая часть не может быть равна нулю там, где существует правильная координатная сеть, так как по условию ее определения координатные линии не могут касаться друг друга, и векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны. Исключим из рассмотрения и точки, в которых векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ обращаются в нуль, так как эти точки будут особыми для параметризации координатных линий. Мы будем называть особой точкой параметризованной поверхности точку, в которой $[\vec{r}_u \vec{r}_v] = 0$ и исключим в дальнейшем эти точки из нашего рассмотрения. Обозначив радиус-вектор текущей точки касательной плоскости через $\vec{r}$, а радиус-вектор точки прикосновения через $\vec{r}_0$, получим уравнение касательной плоскости в виде равенства нулю смешанного произведения

$$\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r} - \vec{r}_0\right) = 0. \tag{X.12}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку прикосновения, называется *нормалью*, а ее направляющий вектор (X.12) — нормальным вектором поверхности.

X.2 Длина дуги

Вычислим длину дуги линии, расположенной на поверхности. Для этого воспользуемся внутренним уравнением кривой (X.7) и подстановкой (X.8). Найдем сначала дифференциал дуги. Так как

$$ds^2 = d\vec{r}^{\,2},$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

то

$$ds^2 = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v du dv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2.$$

Вводя обозначения

$$\vec{r}_u^{\,2} = E; \quad \vec{r}_u \vec{r}_v = F; \quad \vec{r}_v^{\,2} = G, \tag{X.13}$$

получим

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \tag{X.14}$$

Если мы хотим вычислить длину дуги, ограниченную точками кривой, соответствующими значениями параметра t_1 и t_2, то она выразится интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds.$$

Подставляя вместо ds его выражение из (X.14) и вводя явно переменное интегрирование t, получим окончательно

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{X.15}$$

Зная внутреннее уравнение кривой, мы должны выразить u и v через t в выражениях E, F, G, найти производные $\dfrac{du}{dt}$ и $\dfrac{dv}{dt}$, подставить все это в подынтегральную функцию (X.15) и задача сведется к вычислению интеграла, вида

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Выражение (X.14) квадрата дифференциала дуги играет основную роль во всей теории поверхностей. Правая часть его представляет квадратичную форму

$$\phi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{X.16}$$

с коэффициентами, являющимися функциями точки поверхности и с переменными du и dv — дифференциалами криволинейных координат, которые зависят от направления кривой, проходящей через данную точку. Форма ϕ_1 называется *первой основной квадратичной формой поверхности*. Кроме того, ее еще называют для краткости просто *линейным элементом* поверхности, подчеркивая этим, что знание ее является основой для вычисления длин дуг. Действительно, если линейный элемент задан, т.е. заданы его коэффициенты E, F, G в функции u и v известно внутреннее уравнение кривой, то ее дугу можно вычислить даже в том случае, если параметрическое уравнение поверхности неизвестно. Отметим некоторые важные неравенства, которым удовлетворяют коэффициенты линейного элемента. Из равенств

$$E = \vec{r}_u{}^2; \quad G = \vec{r}_v{}^2$$

следует, что для всякой неособенной точки поверхности

$$E > 0; \quad G > 0. \tag{X.17}$$

Применяя тождество Лагранжа, получим

$$\left[\vec{r}_u \vec{r}_v\right]^2 = \vec{r}_u{}^2 \vec{r}_v{}^2 - \left(\vec{r}_u \vec{r}_v\right)^2 = EG - F^2.$$

Выражение в правой части есть дискриминант линейного элемента. Во всякой неособенной точке $\left[\vec{r}_u \vec{r}_v\right] \neq 0$. Поэтому

$$EG - F^2 > 0. \tag{X.18}$$

Из неравенств (X.17) и (X.18) следует, что основная квадратичная форма положительна и не может обратиться в нуль при значении переменных du и dv, не равных нулю одновременно. Квадратичные формы, обладающие этим свойством, называются *положительно-определенными*.

X.3 Угол между двумя линиями

Если две кривые пересекаются, то углом между ними называют угол между их касательными в точке пересечения. Предположим, что кривые лежат на одной поверхности и пересекаются в некоторой точке. Касательные вектора этих кривых

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv; \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$$

будем различать, употребляя различные обозначения для дифференциалов криволинейных координат, соответствующих изменениям последних вдоль рассматриваемых линий Рис.X.35.

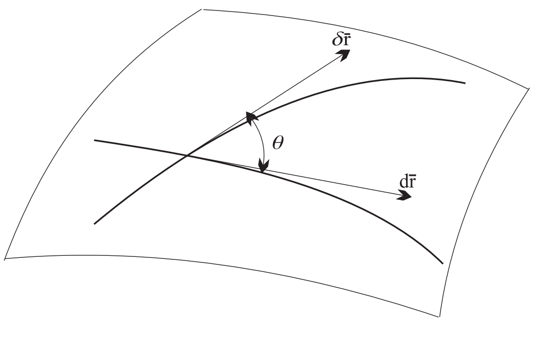


Рис.X.35. *Угол между двумя линиями*

Если две кривые пересекаются, то углом между ними называют угол между их касательными в точке пересечения. Предположим, что кривые лежат на одной поверхности и пересекаются в некоторой точке. Касательные вектора этих кривых

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv; \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$$

будем различать, употребляя различные обозначения для дифференциалов криволинейных координат, соответствующих изменениям последних вдоль рассматриваемых линий Рис.X.35.

Искомый угол θ определится по обычной формуле

$$\cos\theta = \frac{d\vec{r}\delta\vec{r}}{|d\vec{r}||\delta\vec{r}|},$$

в которой следует положить

$$|d\vec{r}| = ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

$$|\delta\vec{r}| = \delta s = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}$$

$$d\vec{r}\delta\vec{r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u\delta u + \vec{r}_v\delta v) = \vec{r}_u{}^2 du\delta u + \vec{r}_u\vec{r}_v(du\delta v + dv\delta u) + \vec{r}_v{}^2 dv\delta v =$$

$$= Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v.$$

Таким образом,

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta v + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdu\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \tag{X.19}$$

Полученная формула показывает, что на данной поверхности угол двух кривых зависит только от отношения дифференциалов криволинейных координат, взятых вдоль кривых в точках их пересечения. Кроме того, следует заметить, что для определения угла, так же как и в случае вычисления дуги, не нужно знать параметрического уравнения поверхности, а достаточно считать известным выражение ее линейного элемента.

Из формулы (X.19) легко получить выражение *координатного угла*, т.е. для этих линий можно считать

$$du = 0; \quad dv \neq 0$$

$$\delta u \neq 0; \quad \delta v = 0,$$

откуда

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG.}} \tag{X.20}$$

В частности, для того, чтобы координатные линии пересекались под прямым углом, т.е. чтобы они образовывали *ортогональную сеть*, необходимо и достаточно, чтобы

$$F = 0$$

а линейный элемент имел вид

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2. \tag{X.21}$$

Такой вид имеют линейные элементы плоскости в прямоугольных и полярных координатах и сферы в координатах географических, так как во всех этих случаях условие ортогональности выполнено.

X.4 Площадь поверхности

Определение длины дуги кривой линии сводится к вычислению суммы длин прямолинейных отрезков с последующим переходом к пределу. Аналогичным образом и определение площади частей криволинейной поверхности сводится к измерению площадей плоских фигур.

Площадь области Ω поверхности выражается двойным интегралом:

$$S = \iint\limits_{\mathrm{D}} \sqrt{EG - F^2}dudv. \tag{X.22}$$

Последнее выражение площади показывает, что для ее вычисления достаточно знание линейного элемента поверхности.

X.5 Наложимость поверхностей

Определение OX.1. *Две поверхности* Σ *и* Σ' *называются наложимыми, если между их точками* M *и* M' *можно установить такую биекцию* Φ*:*

$$\Phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma', \qquad \Phi M = M', \tag{X.23}$$

при которой длины всех соответствующих дуг линий, расположенных на этих поверхностях, равны между собою:

$$s(M_1M_2) = s'(\Phi(M_1)\Phi(M_2)). \tag{X.24}$$

Если две поверхности наложимы друг на друга, то одну из них можно получить *изгибанием* другой, аналогично тому, как изгибается гибкая, но нерастяжимая ткань.

Сформулируем аналитический признак наложимости поверхностей. Предположим, что поверхности Σ и Σ' наложимы. Пусть поверхность Σ параметризована с помощью параметров u, v, т.е., каждой ее точке $M \in \Sigma_1$ соответствуют внутренние координаты (u, v).

Внутренние координаты поверхности Σ' установим по соответствию Φ, полагая, что точка $M' = \Phi(M) \in \Sigma'$ имеет те же внутренние координаты, что и точка M. Такую параметризацию двух поверхностей будем называть *общей параметризацией по отношению к наложимости.* Пусть в этих координатах первые квадратичные формы поверхностей Σ и Σ' равны:

$$\Sigma : \quad ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2, \tag{X.25}$$

$$\Sigma' : \quad ds\ '^2 = E'(u,v)du^2 + 2F'(u,v)dudv + G'(u,v)dv^2. \tag{X.26}$$

Справедлива следующая теорема;

Теорема TX.1. *Для того, чтобы две поверхности были наложимы, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая параметризация этих поверхностей, при которой в точках этих поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами были равны соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм:*

$$E'(u,v) = E(u,v);\ F'(u,v) = F(u,v);\ G'(u,v) = G(u,v). \tag{X.27}$$

X.6 Задачи внутренней геометрии поверхности

Свойства поверхностей принято разделять на две группы. Совокупность этих свойств, сохраняющихся при изгибании поверхности, образует ее *внутреннюю геометрию*, а все остальные свойства, существенно зависящие от формы поверхности во внешнем пространстве, называются *внешними.* Таким образом:

Наложимые поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию.

Задачами внутренней геометрии поверхности являются задачи, полностью определяемые первой квадратичной формой. Все эти задачи сводятся к следующим четырем основным задачам внутренней геометрии поверхности:

1. Вычисление длин дуг кривых на поверхности;
2. Вычисление угла между двумя пересекающимися линиями на поверхности;
3. Вычисление площади части поверхности;
4. Нахождение кратчайших линий на поверхности (геодезических линий).

Первые три задачи мы рассматривали выше.

X.7 Метрический тензор поверхности и его преобразование

Рассмотрим вопрос о том, как преобразуется матрица первой квадратичной формы поверхности при переходе от одной криволинейной системы координат к другой. Пусть $\{x^1, x^2\}$ — некоторая координатная сеть поверхности Σ, а $\{x^{1'}, x^{2'}\}$ — некоторая другая координатная сеть этой же поверхности. Пусть далее, коэффициенты первой квадратичной формы поверхности относительно координат $\{x^1, x^2\}$ равны:

$$g_{11} = E(x^1, x^2);\ g_{12} = g_{21} = F(x^1, x^2);\ g_{22} = G(x^1, x^2), \tag{X.28}$$

а коэффициенты первой квадратичной формы относительно координат $\{x'^1, x'^2\}$ равны:

$$g_{1'1'} = E'(x^{1'}, x^{2'});\ g_{1'2'} = g_{2'1'} = F'(x^{1'}, x^{2'});\ g_{2'2'} = G'(x^{1'}, x^{2'}). \tag{X.29}$$

Тогда квадрат дифференциала длины дуги произвольной кривой на поверхности имеет вид относительно этих двух координатных систем:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \qquad (i, k = \overline{1,2}); \tag{X.30}$$

$$ds'^{\ 2} = g_{i'k'} dx^{i'} dx^{k'}, \qquad (i', k' = \overline{1,2}. \tag{X.31}$$

Поскольку длина дуги кривой не зависит от выбора системы координат на поверхности, должно выполняться равенство:

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{i'k'} dx^{i'} dx^{k'} \tag{X.32}$$

для произвольных дифференциалов координат.

Пусть координаты $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^{1'}, x^{2'}\}$ связаны между собой по закону:

$$x^{1'} = f^1(x^1, x^2); \quad x^{2'} = f^2(x^1, x^2). \tag{X.33}$$

Вычисляя дифференциалы штрихованных координат, как дифференциалы сложных функций, найдем:

$$dx^{1'} = \frac{\partial f^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f^1}{\partial x^2} dx^2; \tag{X.34}$$

$$dx^{2'} = \frac{\partial f^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f^2}{\partial x^2} dx^2, \tag{X.35}$$

или короче:

$$dx^{i'} = A^{i'}_k dx^k, \tag{X.36}$$

где введена квадратная *матрица преобразования* от старых координат координат к новым:

$$A: \qquad A^{i'}k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}. \tag{X.37}$$

Аналогично можно получить и обратное соотношение:

$$dx^i = A^i_{k'} dx^{k'}, \tag{X.38}$$

где введена *матрица обратного преобразования*:

$$A^{-1}: \qquad A^i k' = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}. \tag{X.39}$$

Очевидно, что эти матрицы являются взаимообратными:

$$A^{i'}_k A^k_{j'} = \delta^{i'}_{j'};\ A^{i'}_k A^j_{i'} = \delta^j_k \Longrightarrow AA^{-1} = E. \tag{X.40}$$

Для невырожденности преобразований X.33 необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке поверхности выполнялось условие:

$$\det \|A\| = \left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right| \neq 0. \tag{X.41}$$

Определение OX.2. *Величины a^i и $a^{i'}$ $i, i' = \overline{1, n}$, связанные законом преобразования:*

$$a^{i'} = A_k^{i'} a^k, \tag{X.42}$$

называются компонентами контрвариантных векторов.

Таким образом:

> Дифференциалы координат являются компонентами контрвариантного вектора.

Применяя теперь в уравнении X.32 закон преобразования X.36 дифференциалов координат, получим равенство:

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{i'k'} A_i^{i'} A_k^{k'} dx^i dx^k. \tag{X.43}$$

Это соотношение должно выполняться для любых дифференциалов координат, поэтому должны совпадать и коэффициенты соответствующих квадратичных форм:

$$g_{ik} = A_i^{i'} A_k^{k'} g_{i'k'}. \tag{X.44}$$

Искомый закон обратного преобразования имеет вид:

$$g_{i'k'} = A_{i'}^i A_{k'}^k g_{ik}. \tag{X.45}$$

Определение OX.3. *Величины a_{ik} и $a_{i'k'}$ $i, k, i', k' = \overline{1, n}$, связанные законом преобразования:*

$$a_{i'k'} = A_{i'}^i A_{k'}^k a_{ik}, \tag{X.46}$$

называются компонентами ковариантных тензоров второй валентности.

> Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности образуют компоненты симметричного дважды ковариантного тензора.

Этот тензор называется *метрическим тензором*, а соответствующая ему первая квадратичная форма поверхности называется также *метрикой поверхности* или *метрической формой поверхности.*

X.8 Кривизна кривых на поверхности в евклидовом пространстве

Пусть задана поверхность в трехмерном евклидовом пространстве и (x_0, y_0, z_0) - неособая точка на ней. Предположим сначала, что ось z нормальна к касательной плоскости к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), в этом случае оси x и y ей параллельны. Тогда поверхность локально около точки (x_0, y_0, z_0) задается уравнением $z = f(x, y)$, $\quad z_0 = f(x_0, y_0)$ с

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0, y=y_0} = 0,$$

т.е.

$$\vec{\nabla} f\Big|_{x=x_0, y=y_0} = 0.$$

Рассмотрим второй дифференциал функции $z = f(x, y)$, т.е. $d^2 f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$ и составим матрицу $a_{ij} = f_{x^i x^j}$, где $x^1 = x$, $x^2 = y$ (эта матрица называется *гессианом*). Рассмотрим эту матрицу квадратичной формы в точке (x_0, y_0, z_0) в которой $\vec{\nabla} f = 0$.

Определение OX.4. *Главными кривизнами поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в которой $\vec{\nabla} f = 0$, называются собственные числа матрицы (a_{ij}). Гауссовой кривизной называется детерминант матрицы (a_{ij}) в этой точке, а средней кривизной называется след матрицы в этой точке: след $a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2$, k_1 и k_2 - собственные числа, гауссова кривизна $K = k_1 k_2 = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.*

Гауссова кривизна поверхности зависит только от внутренних метрических свойств этой поверхности.

Мы определили понятие кривизны в специальных координатах, связанных с изучаемой точкой: ось z нормальна к поверхности, а оси x и y касательны к ней в этой точке или, локально, $z = f(x, y)$ и $\vec{\nabla} f = 0$ в точке (x_0, y_0). Для определения этих величин в произвольных координатах обратимся к теории кривизны линий на поверхности. Пусть поверхность задана в параметрической форме

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \tag{X.47}$$

Тогда $\left[\vec{r_u}\,\vec{r_v}\right] = |\left[\vec{r_u}\,\vec{r_v}\right]|\vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности, $|\vec{n}| = 1$. Рассмотрим кривую $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ на поверхности. Мы имеем:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u\dot{u} + \vec{r}_v\dot{v}, \quad \ddot{\vec{r}} = (\vec{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{r}_{uv}\dot{u}v + \vec{r}_{vv}\vec{v}^2) + (\vec{r}_u\ddot{u} + \vec{r}_v\dot{v}).$$

Так как $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ и $\vec{r}_v \perp \vec{n}$, мы получаем

$$\left(\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n}\right) = \left(\vec{r_{uu}}\,\vec{n}\right)\dot{u}^2 + 2\left(\vec{r_{uv}}\,\vec{n}\right)\dot{u}\dot{v} + \left(\vec{r_{vv}}\,\vec{n}\right)\dot{v}^2 = b_{11}\dot{u}^2 + 2b_{12}\dot{u}\dot{v} + b_{22}\dot{v}^2. \tag{X.48}$$

Вывод. Нормальная проекция ускорения $\left(\vec{\ddot{r}}\,\vec{n}\right)$ - это квадратичная форма от вектора скорости $(\dot{u}, \dot{v})$ в локальных координатах $u = x^1$, $v = x^2$.

Положим $b_{11} = L$, $b_{12} = M$, $b_{22} = N$. Имеем

$$\left(\vec{\ddot{r}}\,\vec{n}\right)dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2.$$

Определение OX.5. *Выражение $\left(\vec{\ddot{r}}\,\vec{n}\right)dt^2$ называется второй квадратичной формой поверхности (X.47).*

Инварианты пары квадратичных форм.

Итак, в каждой точке поверхности задана пара квадратичных форм:

$$1) \qquad ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{X.49}$$

$$2) \qquad \left(\vec{\ddot{r}}\,\vec{n}\right)dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j. \tag{X.50}$$

При этом форма ds^2 положительна. Рассмотрим на плоскости пару квадратичных форм, из которых одна положительна. Пусть матрицы квадратичных форм имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{X.51}$$

($g_{21} = g_{21}$, $b_{21} = b_{12}$). Составим уравнение

$$\det(Q - \lambda G) = 0 \tag{X.52}$$

или

$$(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0.$$

Корни λ_1, λ_2 этого уравнения называются *собственными числами пары квадратичных форм*. Решим линейные уравнения

$$\left.\begin{array}{l}(b_{11} - \lambda_i g_{11})\chi^{\,1}_{\,i} + (b_{12} - \lambda_i g_{12})\chi^{\,2}_{\,i} = 0,\\ (b_{12} - \lambda_i g_{12})\chi^{\,1}_{\,i} + (b_{22} - \lambda_i g_{22})\chi^{\,2}_{\,i} = 0,\end{array}\right\} \tag{X.53}$$

где $\chi^{\,1}_{\,i}$, $\chi^{\,2}_{\,i}$ - неизвестные. Если λ_1, λ_2 - собственные числа, то система (X.53) имеет нетривиальные решения

$$\vec{f_1} = (\chi^{\,1}_{\,1}, \chi^{\,2}_{\,1}), \qquad \vec{f_2} = (\chi^{\,1}_{\,2}, \chi^{\,2}_{\,2}).$$

Направления векторов f_1, f_2 называются *главными направлениями* пары квадратичных форм; f_1 соответствует λ_1 и f_2 соответствует λ_2.

Как и прежде скалярные произведения $(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j})$ базисных векторов плоскости обозначаются через g_{ij} $i, j = \overline{1,2}$ (при этом риманова метрика задается формой g_{ij}).

Лемма ЛX.1. *Если собственные числа пары квадратичных форм различны, то главные направления ортогональны.*

Мы имеем два главных направления $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$.

$$\vec{f_1} = \chi^{\,1}_{\,1}\vec{e}_1 + \chi^{\,2}_{\,1}\vec{e}_2, \quad \vec{f_2} = \chi^{\,1}_{\,2}\vec{e}_1 + \chi^{\,2}_{\,2}\vec{e}_2.$$

Их ортогональность означает по определению, что

$$(\overrightarrow{f_1}\,\overrightarrow{f_2}) = g_{ij}\chi^{\,i}_{\,1}\chi^{j}_{2} = 0.$$

Вернемся к первой и второй квадратичным формам поверхности в трехмерном евклидовом пространстве:

$$g_{ij}dx^i dx^j = ds^2, \tag{X.54}$$

$$b_{ij}dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{X.55}$$

Отношения этих квадратичных форм есть кривизна нормального сечения.

Определение ОX.6. *Собственные числа k_1, k_2 этой пары квадратичных форм называются главными кривизнами поверхности в изучаемой точке. Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной K поверхности, а полусумма их H - средней кривизной поверхности:*

$$K = k_1 k_2; \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{X.56}$$

X.9 Геометрический смысл гауссовой кривизны

Выберем для данной точки M_0 поверхности Σ ортонормированный репер $(M_0; x, y, z)$, так чтобы ось M_0z была нормалью к поверхности. Тогда вблизи данной точки поверхность можно задать явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

причем в точке M_0:

$$f_x(M_0) = f_y(M_0) = 0.$$

Таким образом в точке M_0 получим:

$$g_{ij}(M_0) = \delta_{ij},$$

так как $g_{11} = 1 + f_x^2, g_{12} = f_x f_y, g_{22} = 1 + f_y^2$.

Но тогда в данной точке:

$$L = b_{11} = f_{xx};\ M = b_{12} = f_{xy};\ N = b_{22} = f_{yy},$$

Возможны четыре случая:
1a). $K > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: (минимум функции $f(x, y)$ в точке M_0.)
1b). $K > 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: (максимум функции $f(x, y)$ в точке M_0.) - точки, в которых $K > 0$ называются эллиптическими. Вблизи эллиптических точек поверхность имеет вид эллипсоида. Поверхность, состоящая из одних эллиптических точек, является выпуклой.
2). $K < 0 : \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ или наоборот $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, в этих точках поверхность имеет форму седла (гиперболоида), такие точки называются гиперболическими.
3). $K = 0 : \lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$ — такие точки называются параболическими, вблизи этих точек поверхность имеет вид цилиндра.

X.10 Нормальная и геодезическая кривизна и геодезические линии

Определение геодезической кривизны

Определение OX.7. *Геодезической кривизной k_g линии Γ на поверхности в некоторой ее точке называется абсолютная величина проекции второй производной радиуса-вектора этой кривой на касательную плоскость:*

$$k_g = |\text{Пр}_{\text{кас. пл.}} \vec{r}''\,| \tag{X.57}$$

.

Определение OX.8. *Нормальной кривизной k_n линии Γ на поверхности в некоторой ее точке называется величина числовой проекции второй производной радиуса-вектора этой кривой вектор нормали к поверхности в этой точке:*

$$k_n = \text{Пр}_{\vec{N}}\ \vec{r}''\,. \tag{X.58}$$

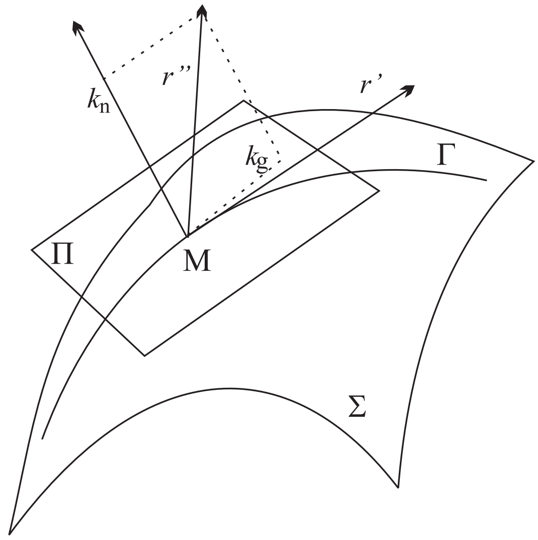


Рис.X.36. *Геодезическая и нормальная кривизна линий на поверхности*

Таким образом, получим выражение для геодезической и нормальной кривизны линии

$$\Gamma: \quad \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \qquad (X.59)$$

на поверхности Σ. Нормальный вектор к поверхности выражается через касательные векторы к координатным линиям:

$$\vec{N} = \left[\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v\right]. \qquad (X.60)$$

Нормальная проекция вектора ускорения равна:

$$k_n = \text{Пр}_{\vec{N}}\ \vec{r}'' = \frac{\left(\vec{r}'' \cdot \vec{N}\right)}{|\vec{N}|} \Longrightarrow .$$

$$k_n = \frac{(\vec{r}'', \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{|[\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}]|}. \qquad (X.61)$$

Таким образом, согласно определению (X.57) по теореме Пифагора получим:

$$k_n^2 + k_g^2 = k^2 = \vec{r}''^{\,2},$$

где k - кривизна линии;

$$k_g^2 = (\vec{r}'')^2 - \frac{\left(\vec{r}'' \cdot \vec{N}\right)^2}{|\vec{N}|^2} \equiv \frac{1}{\vec{N}^2}\left(\vec{N}^2 - \left(\vec{r}'' \cdot \vec{N}\right)^2\right).$$

Применяя здесь тождество Лагранжа (теорему Пифагора):

$$\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} = [\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}]^2 + (\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b})^2,$$

получим более удобное выражение для геодезической кривизны линии:

$$k_g^2 = \frac{1}{\vec{N}^2}\left[\vec{r}'' \cdot \vec{N}\right]^2 \Longrightarrow k_g = \frac{1}{|\vec{N}|}\left|\left[\vec{r}'' \cdot \vec{N}\right]\right|. \qquad (X.62)$$

Используя X.60 и затем — формулу раскрытия двойного векторного произведения:

$$[\overrightarrow{a}\ [\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c}\,]] = \vec{b}(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{c}\,) - \vec{c}(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{b}\,),$$

получим с учетом определения коэффициентов первой квадратичной формы:

$$k_g^2 = \frac{1}{EG - F^2}\left(E\left(\vec{r}'' \cdot \vec{r}_v\right)^2 - 2F\left(\vec{r}'' \cdot \vec{r}_v\right)\left(\vec{r}'' \cdot \vec{r}_u\right) + G\left(\vec{r}'' \cdot \vec{r}_u\right)^2\right). \qquad (X.63)$$

Заметим, что поскольку геодезическая кривизна определяется проекцией вектора ускорения на касательную плоскость, то она должна полностью определяться коэффициентами первой квадратичной формы и их производными.

Определение OX.9. *Линия Γ поверхности Σ называется геодезической, если ее геодезическая кривизна во всех точках равна нулю.*

Глава XI

Задачи дифференциальной геометрии на первую квадратичную форму

Основные формулы

Пусть поверхность Σ задана своими параметрическими уравнениями:

$$\Sigma: \quad \vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Образуем частные производные радиуса - вектора:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \qquad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},$$

определим скалярные произведения:

$$\vec{r}_u^{\,2} = E; \quad \vec{r}^{\,2} = G; \quad \left(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v\right) = F$$

и квадратичную форму:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{XI.1}$$

которая называется *первой квадратичной формой поверхности.* Коэффициенты этой формы образуют матрицу квадратичной формы:

$$G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

В неособых точках поверхности матрица G невырождена:

$$\det \|G\| \neq 0.$$

Векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, являясь касательными к координатным линиям поверхности, являются и касательными векторами поверхности. Вектор нормали к поверхности определяется как:

$$\vec{N} = \left[\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v\right].$$

Пример ПXI.1. *Составить уравнение касательной плоскости сферы.*

<u>Решение</u>

$$\vec{r} = a(\vec{e}(\varphi)\cos\psi + \vec{k}\sin\psi),$$

$$\vec{r}_\varphi = a\vec{e}_1(\varphi)\cos\psi,$$

$$\vec{r}_\psi = a(-\vec{e}(\varphi)\sin\psi + \vec{k}\cos\psi),$$
$$\vec{N} = [\overset{\rightarrow}{r_\varphi}\overset{\rightarrow}{r_\psi}] = a\vec{r},$$
$$\vec{r}(\vec{\rho} - \vec{r}) = 0.$$

Пример ПXI.2. *Найти первую квадратичную форму геликоида (см. Рис.XI.37):*

$$\vec{r} = \vec{e}(\varphi)t + a\varphi\vec{k}. \tag{XI.2}$$

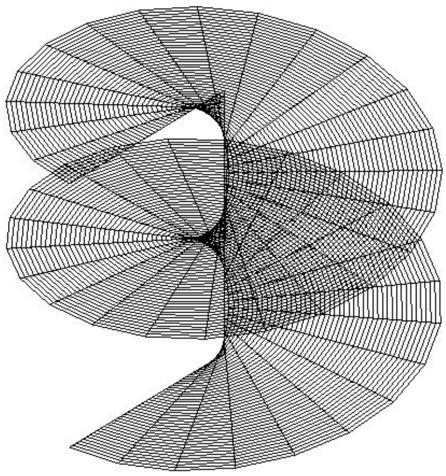


Рис.XI.37. *Геликоид: два витка*

Решение

Вычисляя частные производные от радиуса-вектора (XI.2), найдем:

$$\vec{r}_t = \vec{e}(\varphi) = (cos\varphi, \sin\varphi, 0);$$
$$\vec{r}_\varphi = (-t\sin\varphi, t\cos\varphi, a).$$

Таким образом:

$$E = (\vec{r}_t, \vec{r}_t) = 1; \quad F = (\vec{r}_t, \vec{r}_\varphi) = 0;$$
$$G = (\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\varphi = t^2 + a^2).$$

Первая квадратичная форма геликоида равна:

$$ds^2 = dt^2 + (a^2 + t^2)d\varphi^2. \tag{XI.3}$$

XI.1 Задачи внутренней геометрии поверхности

Основные формулы

Пусть кривая Γ на поверхности задана параметрическими уравнениями:

$$\Gamma: \quad u = u(t); \quad v = v(t).$$

Тогда длина этой линии определяется по формуле:

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}dt.$$

Пусть на поверхности наряду с линией Γ задана своими параметрическими уравнениями и линия $\overline{\Gamma}$:

$$\overline{\Gamma}: \quad u = \overline{u}(\tau), \qquad v = \overline{v}(\tau)$$

и пусть эти линии пересекаются в некоторой точке M_0 :

$$M_0 = \Gamma \cap \overline{\Gamma} \Longrightarrow u(t_0) = \overline{u}(\tau_0); v(t_0) = \overline{v}(\tau_0).$$

Углом между линиями на поверхности в точке их пересечения называется угол между их касательными векторами. Косинус угла между этими линиями вычисляется по формуле:

$$\cos\Theta = \frac{E\dot{u}_0\dot{\overline{u}}_0 + F(\dot{u}_0\dot{\overline{v}}_0 + \dot{\overline{u}}_0\dot{v}_0) + G\dot{v}_0\dot{\overline{v}}_0}{\sqrt{E\dot{u}_0^2 + 2F\dot{u}_0\dot{v}_0 + G\dot{v}_0^2}\sqrt{E\dot{\overline{u}}_0^2 + 2F\dot{\overline{u}}_0\dot{\overline{v}}_0 + G\dot{\overline{v}}_0^2}}.$$

Площадь части поверхности Ω вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Пример ПXI.3. *Найти уравнения сферических локсодром, т.е., кривых всюду имеющих один и тот же угол по отношению к меридианам.*

Решение

Параметрические уравнения сферы радиуса R имеет вид:

$$\vec{r} = R(\cos\varphi\cos\theta, sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

При этом пусть искомая кривая Γ задана параметрическими уравнениями:

$$\Gamma: \quad \varphi = \varphi(t);\ \theta = \theta(t).$$

Меридиан задается уравнением:

$$\overline{\Gamma}: \quad \varphi = \varphi_0.$$

Пусть эти кривые пересекаются в некоторой точке $M_0(\varphi_0, \theta_0)$. Касательный вектор к меридиану в этой точке равен:

$$\vec{T}_m = \vec{r}_\theta\,|_{M_0} = R(-\cos\varphi_0\sin\theta_0, -\sin\varphi_0\sin\theta_0, \cos\theta_0).$$

Нормируя его на единицу, получим:

$$\vec{\tau}_m = (-\cos\varphi_0\sin\theta_0, -\sin\varphi_0\sin\theta_0, \cos\theta_0).$$

Касательный вектор к искомой кривой равен:

$$\vec{T} = \vec{r}_t = R(-\sin\varphi\cos\theta\,\dot{\varphi} - \cos\varphi\sin\theta\,\dot{\theta}, \cos\varphi\cos\theta\,\dot{\varphi} - \sin\varphi\sin\theta\,\dot{\theta}, \cos\theta\,\dot{\theta})_{M_0}.$$

Длина этого вектора равна:

$$|\vec{T}| = R\sqrt{\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2}.$$

Полагая теперь $t = \theta$ и избавляясь от несущественного множителя, найдем:

$$\vec{T} = (-\sin\varphi\cos\theta\,\varphi' - \cos\varphi\sin\theta, \cos\varphi\cos\theta\,\varphi' - \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)_{M_0}$$

и

$$|\vec{T}| = \sqrt{1 + \varphi'^2\cos^2\theta},$$

где обозначено $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{d\theta}$. Вычисляя, найдем: $(\vec{T}, \vec{\tau}_m) = 1$.

Таким образом, если α - угол между искомой линией и меридианом, то:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2\cos^2\theta}}.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, нетрудно получить соотношение:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{m} = \cos\theta\frac{d\varphi}{d\theta} \Longrightarrow \qquad \text{(XI.4)}$$

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = md\varphi, \qquad \text{(XI.5)}$$

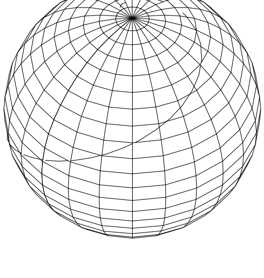


Рис.XI.38. *Сферическая локсодрома*

где m - согласно условию задачи произвольная константа, так как постоянен угол между локсодромой и меридианом. Интегрируя это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, найдем уравнение локсодромы:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=ce^{m\varphi}.$$

Пример ПXI.4. *Вычислить площадь поверхности тора, заданного параметрическими уравнениями*

$$\vec{r}=((a+b\cos v)\cos u,(a+b\cos v)\sin u,b\sin v),\quad 0\le u,\ v\le 2\pi.$$

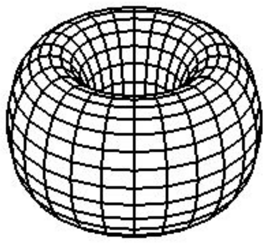


Рис.XI.39. *Тор*

Решение

Прежде всего вычислим частные производные радиуса-вектора и коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\vec{r}_u=(-(a+b\cos v)\sin u,(a+b\cos v)\cos u,0);$$

$$\vec{r}_v=(-b\sin v\cos u,-b\sin v\sin u,b\cos v).$$

Поэтому

$$E=(a+b\cos v)^2;\quad F=0,\quad G=b^2.$$

Тогда по формуле (X.22) площадь поверхности тора равна:

$$\sigma=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{EG-F^2}dudv=\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^{2\pi}b(a+b\cos v)dv\right\}du=$$

$$=2\pi b\int\limits_0^{2\pi}(a+b\cos v)dv=2\pi b\ (av+b\sin v)|_0^{2\pi}=4\pi^2ab.$$

Пример ПXI.5. *Найти угол под которым кривые*

$$\rho=Ae^{m\varphi}\tag{XI.6}$$

пересекают прямолинейные образующие кругового конуса, имеющего первую квадратичную форму:

Решение

Конус задается следующими параметрическими уравнениями:

$$\vec{r}=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,\rho\operatorname{ctg}\Omega),$$

где 2Ω - угол при вершине конуса, а ρ - полярный радиус. Вычисляя производные радиуса-вектора, получим:

$$\vec{r}_\rho=(\cos\varphi,\sin\varphi,\operatorname{ctg}\Omega),$$

$$\vec{r}_\varphi=\rho(-\sin\varphi,\cos\varphi,0).$$

Таким образом:

$$E = (\vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_\rho) = \frac{1}{\sin^2\Omega}; \quad F = (\vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_\varphi) = 0; \quad G = (\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi) = \rho^2.$$

Окончательно приведем первую квадратичную форму конуса к виду:

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{\sin^2\Omega} + \rho^2 d\varphi^2. \tag{XI.7}$$

Для образующей $\delta\varphi = 0; \rho = t$, для линии же (XI.6): $\varphi = \tau$, $\rho = Ae^{m\varphi}$, $d\rho = m\rho d\tau$. В точке пересечения M_0 этих линий $\rho_0 = Ae^{m\varphi_0}$. Для направляющего вектора образующей в точке пересечения получим:

$$\vec{r}\,'_t(\rho_0, \varphi_0) = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, \operatorname{ctg}\Omega);$$

а для направляющего вектора линии (XI.6) в точке пересечения получим:

$$\vec{r}\,'_\tau(\rho_0, \varphi_0) = \rho_0(m\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0, m\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0, m\operatorname{ctg}\Omega).$$

Таким образом:

$$|\vec{r}\,'_t|_{M_0} = \frac{1}{\sin\Omega}; \quad |\vec{r}\,'_\tau|_{M_0} = \rho_0\sqrt{\frac{m^2}{\sin^2\Omega} + 1};$$

$$(\vec{r}\,'_t \cdot \vec{r}\,'_\tau)_{M_0} = \frac{m}{\sin\Omega}.$$

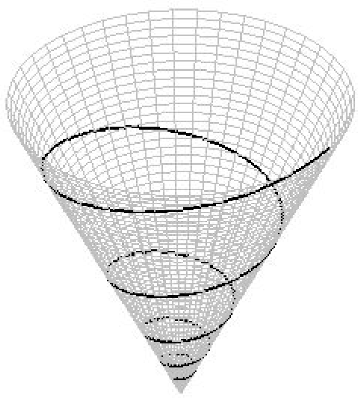


Рис.XI.40. *Коническая локсодрома (XI.6): $A = 1, m = 0,1$*

Таким образом, получим:

$$\cos\theta = \frac{(\vec{r}\,'_t \cdot \vec{r}\,'_\tau)_{M_0}}{|\vec{r}\,'_t|_{M_0} \quad |\vec{r}\,'_\tau|_{M_0}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + \sin^2\Omega}}$$

($=$ Const). Т.е., линии (XI.6) пересекаются с образующими конуса под постоянным углом:

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\sin\Omega}{m}.$$

Таким образом, линии (XI.6) являются *коническими локсодромами.*

XI.2 Задача на вычисление геодезической кривизны

Пример ПXI.6. *Вычислить геодезическую кривизну параллели на сфере.*

<u>Решение</u>

Геодезическую кривизну будем вычислять по формуле (X.62), согласно которой:

$$k_g = |[\overrightarrow{r''}\,\overrightarrow{m}]|,$$

где $\vec{m}$ - орт нормали. Сферу зададим параметрическими уравнениями с помощью географических координат:

$$\vec{r} = R(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi), \qquad \text{где} \;\; \varphi \in [0, 2\pi], \; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда параллель сферы, Γ, будет задаваться уравнением

$$\theta = \theta_0,$$

т.е.:

$$\Gamma: \qquad \vec{r} = R(\cos\varphi\cos\theta_0, \sin\varphi\cos\theta_0, \sin\theta_0),$$

- параметром параллели является полярный угол φ.

Вычислим производные радиуса вектора на параллели:

$$\vec{r}_\varphi = R(-\sin\varphi\cos\theta_0, \cos\varphi\cos\theta_0, 0); \qquad \vec{r}_\theta = R(-cos\varphi\sin\theta_0, -sin\varphi\sin\theta_0, cos\theta_0).$$

Вычисляя векторное произведение $[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\theta]$ и нормируя его, получим:

$$\vec{m} = (\cos\varphi\cos\theta_0, \sin\varphi\cos\theta_0, \sin\varphi) \qquad \left(= \frac{\vec{r}}{R}\right) -$$

- очевидный результат: вектор нормали к любой точке сферы коллинеарен радиусу-вектору, направленного из центра сферы к этой точке. Таким же очевидным способом мы можем провести и натуральную параметризацию параллели, так как из простых геометрических рассуждений видно, что ее длина равна $2\pi R\cos\theta_0$. Однако, в методических целях получим этот результат формально. Вычислим дифференциал радиуса-вектора вдоль параллели:

$$d\vec{r} = R\cos\theta_0(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)d\varphi.$$

Таким образом, дифференциал длины дуги параллели равен:

$$ds = |d\vec{r}| = R\cos\theta_0 d\varphi.$$

Интегрируя это выражение, получим предыдущий результат. Таким образом, для параллели:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{R\cos\theta_0}\frac{d}{d\varphi}.$$

Выполняя простое дифференцирование, найдем для параллели:

$$\vec{r}'' = \frac{1}{R\cos\theta_0}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0).$$

Окончательно найдем:

$$[\vec{m}, \vec{r}''] = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{R}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \Longrightarrow$$

$$k_g = |[\vec{m}, \vec{r}'']| = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{R}.$$

XI.3 Задачи на вычисление первой квадратичной формы поверхности вращения

Пример ПXI.7. *Задача на вычисление первой квадратичной формы поверхности вращения*

В качестве примера рассмотрим поверхность вращения. Поверхность вращения, Σ, можно задать некоторой осью вращения OO' (осью симметрии) и плоской кривой γ, расположенной в плоскости Π, содержащей ось симметрии (см. Рис.XI.41). Кривая γ называется образующей линией (или проще, образующей) поверхности вращения. Если в качестве оси вращения выбрать ось Oz цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\,; \\ y &= \rho\sin\varphi\,; \;\;, \\ z &= z \end{aligned} \tag{XI.8}$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ - полярный радиус, φ - полярный угол, то уравнение поверхности вращения можно записать в виде:

$$\rho = \rho(z); \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{XI.9}$$

т.е., задать одной функцией $\rho(z)$.

Выберем в качестве внутренних координат поверхности координаты $x^1 = u = \varphi$ и $x^2 = v = z$. Линии $z = \mathrm{Const}$ называются *параллелями* поверхности вращения, а линии $\varphi = \mathrm{Const}$ - *меридианами* поверхности вращения.

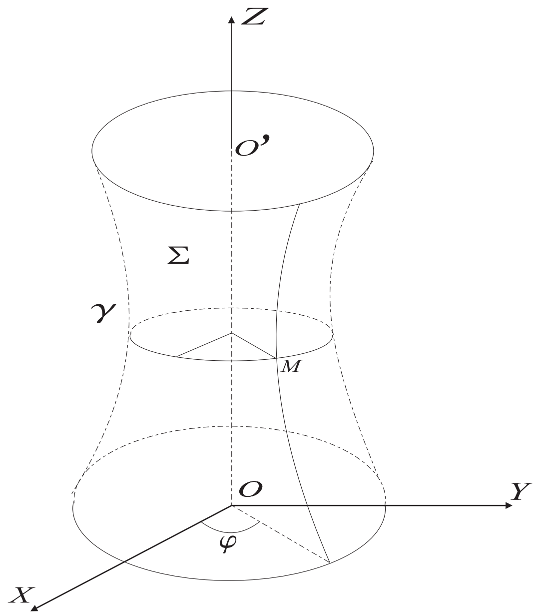


Рис.XI.41. *Поверхность вращения*

Вычислим производные радиуса-вектора (XI.8):

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \vec{r}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-\rho \sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)\,; \\ \vec{r}_v &= \vec{r}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (\rho' \cos\varphi, \rho' \sin\varphi, 1) \end{aligned}, \tag{XI.10}$$

где

$$\rho' = \frac{d\rho}{dz}.$$

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности вращения:

$$E = \vec{r}_\varphi^{\ 2} = \rho^2; \quad G = \vec{r}_z^{\ 2} = 1 + \rho'^{\,2}; \quad F = \Big(\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_z\Big) = 0. \tag{XI.11}$$

Таким образом первая квадратичная форма поверхности вращения в координатах φ, z принимает вид:

$$ds^2 = \rho^2(z) d\varphi^2 + (1 + \rho'^{\,2}(z) dz^2), \tag{XI.12}$$

а матрица первой квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} \rho^2(z) & 0 \\ 0 & 1 + \rho'^{\,2}(z) \end{pmatrix} \tag{XI.13}$$

диагональна, т.е.:

> Параллели и меридианы поверхности вращения ортогональны между собой.

Площадь части поверхности вращения, заключенной между ее параллелями $z = z_0, z = z_1$ и меридианами $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$, вычисляется по формуле:

$$S = \int\!\!\int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv = \int\limits_{z_0}^{z_1} dz \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho(x) \sqrt{1 + \rho'(z)^{\,2}} d\varphi =$$

$$(\varphi_1-\varphi_0)\int\limits_{z_0}^{z_1}\sqrt{1+\rho'(z)^{\,2}}dz. \qquad \text{(XI.14)}$$

Вводя вместо z новую внутреннюю координату η:

$$\eta=\int\frac{\sqrt{1+\rho'^{\,2}(z)}}{\rho}d\rho, \qquad \text{(XI.15)}$$

метрику поверхности вращения можно привести к *конформно - плоскому виду*:

$$ds^2=\rho^2(\eta)(d\varphi^2+d\eta^2). \qquad \text{(XI.16)}$$

Пример ПXI.8. *Вычисление первой квадратичной формы сферы*

<u>Решение</u>

В качестве конкретного примера геометрии поверхности вращения рассмотрим геометрию сферы. В сферических координатах:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta\,; \\ y &= r\sin\varphi\cos\theta\,; \qquad \varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\quad r\in[0,\infty) \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned} \qquad \text{(XI.17)}$$

параметрические уравнения сферы радиуса R получаются при $r=R$:

$$\vec{r}=R(\cos\varphi\cos\theta,\sin\varphi\cos\theta,\sin\theta). \qquad \text{(XI.18)}$$

Отметим, что сферические координаты на сфере, т.е., ее внутренние координаты φ и θ называются *географическими координатами*, соответственно, *долготой* и *широтой*. Заметим, что в географических координатах всюду на сфере:

$$\cos\theta\geq 0. \qquad \text{(XI.19)}$$

Для вычисления геометрических характеристик сферы в соответствующих формулах предыдущего раздела необходимо положить:

$$\rho=R\cos\theta;\quad z=R\sin\theta, \qquad \text{(XI.20)}$$

откуда дифференцированием, например, получим:

$$\rho'=\frac{d\rho}{dz}=\frac{d\rho}{d\theta}\Big/\frac{dz}{d\theta}\,,\Longrightarrow \rho'=-\operatorname{tg}\theta; \qquad \text{(XI.21)}$$

$$\rho''=\frac{d\rho'}{d\theta}\Big/\frac{dz}{d\theta}\,,\Longrightarrow \rho''=-\frac{1}{R\cos^3\theta}. \qquad \text{(XI.22)}$$

Подсчитывая с помощью (XI.21) выражение $1+\rho'^{\,2}$, получим:

$$1+\rho'^{\,2}=\frac{1}{\cos^2\theta}. \qquad \text{(XI.23)}$$

Первая квадратичная форма сферы

Вычисляя метрику сферы согласно формулам (XI.12), (XI.13), найдем:

$$ds^2=R^2(\cos^2\theta d\varphi^2+d\theta^2), \qquad \text{(XI.24)}$$

$$G=R^2\begin{pmatrix}\cos^2\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad \text{(XI.25)}$$

Таким образом, определитель первой квадратичной формы сферы

$$\det\|G\| = R^4\cos^2\theta \tag{XI.26}$$

обращается в нуль в точках

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{XI.27}$$

Эти точки являются *особыми точками* географической системы координат и называются *северным*, N, и *южным*, S, полюсами сферы, соответственно.

Решим теперь три основные задачи внутренней геометрии сферы;

Пример ПXI.9. *С помощью первой квадратичной формы найти длину параллелей и меридианов на сфере*

Решение

Вычислим с помощью метрики (XI.24) длину меридиана, отсчитываемую от северного полюса $\theta = \pi/2$ до некоторой параллели $\theta = \theta_0$. На меридиане $\varphi = \mathrm{Const}$, поэтому согласно (XI.24):

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 \Longrightarrow$$

$$ds = -Rd\theta$$

(знак соответствует уменьшению значения θ). Таким образом, интегрируя, найдем:

$$s = \int\limits_{-\pi/2}^{\theta_0} Rd\theta = R\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right). \tag{XI.28}$$

Вычислим, например, длину всей параллели, соответствующей углу θ_0. На параллели $\theta = \mathrm{Const} = \theta_0$, поэтому согласно (XI.24) получим:

$$ds^2 = R^2\cos^2\theta_0 d\varphi^2 \Longrightarrow ds = R\cos\theta d\varphi$$

(мы выбрали положительное направление обхода параллели) и, следовательно:

$$s = \int\limits_0^{2\pi} R\cos\theta_0 d\varphi = 2\pi R\cos\theta_0. \tag{XI.29}$$

Пример ПXI.10. *Найти угол между параллелями и меридианами на сфере*

Решение

Как мы нашли ранее, угол между параллелями и меридианами любой поверхности вращения, в том числе и сферы, равен $\pi/2$, так как недиагональный коэффициент первой квадратичной формы $F = g_{12} = 0$.

Пример ПXI.11. *Найти площадь части сферы*

Решение

Вычислим также площадь части сферы, учитывая, что для метрики сферы (XI.24) определитель матрицы первой квадратичной формы равен (XI.26):

$$\sqrt{g} = R^4 \cos^2 \theta.$$

Таким образом, площадь части сферы вычисляется по формуле:

$$S = R^2 \iint\limits_{\Omega} \cos\theta d\varphi d\theta. \tag{XI.30}$$

Глава XII

Задачи на вторую квадратичную форму поверхности

Основные формулы

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

где коэффициенты L, M, N определяются соотношениями:

$$L = \Big(\vec{m} \cdot \vec{r}_{uu}\Big); \quad M = \Big(\vec{m} \cdot \vec{r}_{uv}\Big); \quad N = \Big(\vec{m} \cdot \vec{r}_{vv}\Big),$$

где $\vec{m}$ - единичный вектор нормали к поверхности. Поскольку

$$\vec{m} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]^2},$$

то

$$L = \frac{(\overset{\rightarrow}{r_{uu}}, \overset{\rightarrow}{r_u}, \overset{\rightarrow}{r_v})}{\sqrt{[\overset{\rightarrow}{r_u} \overset{\rightarrow}{r_v}]^2}}; \quad M = \frac{(\overset{\rightarrow}{r_{uv}}, \overset{\rightarrow}{r_u}, \overset{\rightarrow}{r_v})}{\sqrt{[\overset{\rightarrow}{r_u} \overset{\rightarrow}{r_v}]^2}}; \quad N = \frac{(\overset{\rightarrow}{r_{vv}}, \overset{\rightarrow}{r_u}, \overset{\rightarrow}{r_v})}{\sqrt{[\overset{\rightarrow}{r_u} \overset{\rightarrow}{r_v}]^2}},$$

или в координатах

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Составим матрицу B второй квадратичной формы:

$$B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

а также λ - матрицу пары квадратичных форм:

$$\overline{B} = B - \lambda G = \begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix}$$

и определим *собственные векторы* $\vec{u}_\alpha, (\alpha = 1, 2)$ пары квадратичных форм:

$$(B - \lambda G)U = 0.$$

Эти векторы будем называть *направлениями кривизн*, а соответствующие им собственные значения $\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$ — *главными кривизнами* поверхности в точке.

Величины:

$$K = k_1 k_2$$

называются *гауссовыми кривизнами*, а величины —

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

— средними кривизнами.

Пример ПXII.1. *Вычислить вторую квадратичную форму поверхности вращения*

Решение

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы поверхности вращения. Сначала найдем вектор нормали к поверхности вращения:

$$\vec{N} = \left(\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_z \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\rho \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ \rho' \cos\varphi & \rho' \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi, -\rho'). \tag{XII.1}$$

Тогда единичный вектор нормали равен:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho'^{\,2}}}(\cos\varphi, \sin\varphi, -\rho'). \tag{XII.2}$$

Заметим, что выбранное направление единичного вектора нормали соответствует внешней нормали.

Вычисляя вторые производные радиуса-вектора (XI.8), найдем:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\varphi\varphi} &= -\rho(\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \ ; \\ \vec{r}_{\varphi z} &= \rho'(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \ ; \\ \vec{r}_{zz} &= \rho''(\cos\varphi, \sin\varphi, 0). \end{aligned} \tag{XII.3}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} L &= \left(\vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi\varphi} \right) = -\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho'^{\,2}}}\,; \\ M &= \left(\vec{n} \cdot \vec{r}_{\varphi z} \right) = 0\,; \\ N &= \left(\vec{n} \cdot \vec{r}_{zz} \right) = \frac{\rho''}{\sqrt{1+\rho'^{\,2}}} \end{aligned} \tag{XII.4}$$

- матрица второй квадратичной формы диагональна:

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+\rho'^{\,2}}} \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & \rho'' \end{pmatrix}. \tag{XII.5}$$

Следовательно, главные направления совпадают с направлением координатных линий φ и z на поверхности. Характеристическое уравнение для собственных чисел принимает вид:

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & 0 \\ 0 & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0, \tag{XII.6}$$

следовательно, собственные числа λ_1, λ_2, а, значит, и главные кривизны k_1, k_2 равны:

$$k_1 = \frac{L}{E} = -\frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho'^{\,2}}} \qquad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{\rho''}{(1+\rho'^{\,2})^{3/2}}. \tag{XII.7}$$

Гауссова кривизна поверхности вращения равна:

$$K = k_1k_2 = \frac{LN}{EG} = -\frac{\rho''}{\rho(1+\rho'^{\,2})^2}. \tag{XII.8}$$

Таким образом, *знак гауссовой кривизны поверхности вращения полностью определяется знаком второй производной полярного радиуса,* ρ''. В частности, для цилиндра $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}: \quad \rho = \mathrm{Const}, \quad \rho' = 0, \quad \rho'' = 0:$$

$$B = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е., гауссова кривизна цилиндра равна нулю: $K = k_1k_2 = 0$.

Для однополостного гиперболоида вращения $\mathcal{H}_1$:

$$\mathcal{H}_1: \quad \rho = \mathrm{ch}\, t, \quad z = \mathrm{sh}\, t \Longrightarrow$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{dz} = \mathrm{th}(t),$$

$$\rho'' = \frac{dr'}{dt}\frac{dt}{dz} = \frac{1}{\mathrm{ch}^3 t} \Longrightarrow \rho'' \geq 0.$$

Таким образом, согласно формуле (XII.8):

> Гауссова кривизна однополостного гиперболоида вращения отрицательна.

Пример ПXII.2. *Вычислить вторую квадратичную форму сферы*

Решение

Согласно формуле (XII.4) на 134 найдем выражения для главных кривизн сферы:

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{R}. \tag{XII.9}$$

Таким образом, главные кривизны сферы постоянны и равны, что выражает свойства изотропии сферы (независимость ее геометрических свойств от направления на сфере). Гауссова кривизна также постоянна и положительна:

$$K = R^2 > 0. \tag{XII.10}$$

Таким образом, сфера является примером поверхности *постоянной положительной гауссовой кривизны.*

Пример ПXII.3. *Вычислить вторую квадратичную форму, главные кривизны, среднюю и гауссову кривизны геликоида:*

$$\vec{r} = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, a\varphi.) \tag{XII.11}$$

Решение

Воспользуемся результатами задачи ПXI.2:

$$\begin{aligned} \vec{r}_t &= \vec{e}(\varphi) = (cos\varphi, \sin\varphi, 0); \\ \vec{r}_\varphi &= (-t\sin\varphi, t\cos\varphi, a). \end{aligned} ,$$

$$E = 1; \quad F = 0; \qquad G = t^2 + a^2.$$

Первая квадратичная форма геликоида равна:

$$ds^2 = dt^2 + (a^2 + t^2)d\varphi^2. \tag{XII.12}$$

Вычислим вектор нормали к поверхности геликоида:

$$\vec{N} = [\vec{r}_t\,, \vec{r}_\varphi\,] = N := (a \sin\varphi, -a\cos\varphi, t).$$

Вычисляя длину этого вектора, найдем:

$$|\vec{N}| = \sqrt{a^2 + t^2}.$$

Таким образом, орт нормали, $\vec{m}$, есть:

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}(a\sin\varphi, -a\cos\varphi, t).$$

Вторые производные радиуса-вектора равны:

$$\vec{r}_{tt}\, = 0, \qquad \vec{r}_{t\varphi}\, = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0); \qquad \vec{r}_{\varphi\varphi}\, = (-t\cos\varphi, -t\sin\varphi, 0).$$

Получим отсюда коэффициенты второй квадратичной формы:

$$B_{tt} = (\vec{m}, \vec{r}_{tt}\,) = 0; \qquad B_{t\varphi} = (\vec{m}, \vec{r}_{t\varphi}\,) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}; \qquad B_{\varphi\varphi} = (\vec{m}, \vec{r}_{\varphi\varphi}\,) = 0.$$

Составим λ-матрицу:

$$||B - \lambda G|| = \begin{pmatrix} -\lambda & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+t^2}} \\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+t^2}} & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение:

$$\det{(B - \lambda G)} = 0,$$

найдем его корни:

$$\lambda_1 = \frac{-a}{a^2+t^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{a}{a^2+t^2}.$$

Эти собственные числа и являются главными кривизнами геликоида; его средняя (H) и полная (гауссова, K,) кривизны равны:

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 0; \qquad K = \lambda_1\lambda_2 = -\frac{a^2}{(a^2+t^2)^2} < 0.$$

Пример ПXII.4. *Исследовать характер точек параболоида вращения и выяснить, существуют ли на нем точки закругления.*

Решение

Напомним, что точками закругления называются такие эллиптические точки, в которых главные кривизны совпадают. Параметрические уравнения параболоида вращения можно записать в виде:

$$\vec{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, a\rho^2).$$

Проводя вычисления, аналогичные предыдущим, найдем:

$$\vec{r}_\rho\, = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2a\rho); \qquad \vec{r}_\varphi\, = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0);$$

$$\vec{r}_{\rho\rho} = (0, 0, 2a); \qquad \vec{r}_{\rho\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0); \qquad \vec{r}_{\varphi\varphi} = (-\rho\cos\varphi, -\rho\sin\varphi, 0).$$

Вектор нормали равен:

$$\vec{N} = [\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi] = (-2a\rho^2\cos\varphi, -2a\rho^2\sin\varphi, \rho) \Longrightarrow$$

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}}(-2\rho a\cos\varphi, -2\rho a\sin\varphi, 1).$$

Таким образом. найдем:

$$||G|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 + a^2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{2a}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{2a\rho^2}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим:

$$\lambda_1 = \frac{2a}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}}; \qquad \frac{2a\rho^2}{\sqrt{1 + 4\rho^2 a^2}(\rho^2 + a^2)}.$$

Отсюда следует, что

1. всюду на параболоиде $K > 0$, следовательно, все его точки эллиптические;
2. Уравнение

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Longrightarrow 1 = \frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}$$

не имеет решений ни при каких значениях $a \neq 0$, следовательно, точек закругления не существует.

Литература

[1] Игнатьев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. Часть I.* Казань, 2000 г, компьютерная версия.

[2] Игнатьев Ю.Г. *Геометрия. Аффинные пространства 1. Курс лекций.* Казань, 1997 г., компьютерная версия

[3] Игнатьев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. ЧастьII.* Казань, 2001 г, компьютерная версия.

[4] Игнатьев Ю.Г. *Дифференциальная геометрия. Курс лекций.* Казань, 2001 г, компьютерная версия.

[5] Игнатьев Ю.Г. *Проективная геометрия и методы изображений. Курс лекций.* Казань, 2001 г, компьютерная версия.

[6] Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей. II. Геометрия.* М., “Наука”, 1987.

[7] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Аналитическая геометрия.* М., “Наука”, 1986.

[8] Дьедонне Ж. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М., “Наука”, 1972.

[9] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия I.* М., “Просвещение”, 1974.

[10] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия. II.* М., “Просвещение”, 1975.

[11] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. *Геометрия. Часть I.* М., “Просвещение”, 1986.

[12] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. *Геометрия. Часть II.* М., “Просвещение”, 1987.

[1]

[1] © *Программный продукт BIBLIO профессора Ю.Г. Игнатьева*

Геометрия: Учебное пособие
к государственному экзамену по математике

Автор - **Ю.Г. Игнатьев**, доктор физ.-мат. наук, профессор,
заслуженный деятель науки РТ
Редактор - **А.Р. Самигуллина**

Научно-исследовательская лаборатория
«Информационных технологий в математическом образовании»
Казанского (Приволжского) федерального университета
420035, г. Казань, ул. Кремлевская, 35
Компьютерный набор и верстка в издательской системе LaTeX2ε В.И.Ковтун.
Стилевое оформление «*BIBLIO*» Ю.Г.Игнатьева